CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	9 febbraio 2017
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice A e $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

   (a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} A$ e fornire una base di $\operatorname{Ker} L_A$ e le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L_A$

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice N del cambio di variabile $X = N\,X'$ che permette di ottenere la forma canonica.

   (d) Determinare il segno di q e fornire, se esistono, un vettore non nullo su cui q è nulla e uno su cui q è negativa, giustificando la risposta.

---

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polonomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8 pt)**

Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 2 & 4-k \\ 2-k & 2 & 2-k & 2-k \\ 2-k & 2-k & 4-2k & 6-3k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-k \\ 2 \\ 2-k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 4$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 febbraio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice A e $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

   (a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} A$ e fornire una base di $\operatorname{Ker} L_A$ e le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L_A$

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice N del cambio di variabile $X = N\,X'$ che permette di ottenere la forma canonica.

   (d) Determinare il segno di q e fornire, se esistono, un vettore non nullo su cui q è nulla e uno su cui q è positiva, giustificando la risposta.

---

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polonomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8 pt)**

Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -k & 4-2k \\ -k & 4-k & 4 & k \\ k+4 & 4-k & 4-3k & 4-3k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8-3k \\ 2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 febbraio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice A e $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

   (a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} A$ e fornire una base di $\operatorname{Ker} L_A$ e le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L_A$

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice N del cambio di variabile $X = N\,X'$ che permette di ottenere la forma canonica.

   (d) Determinare il segno di q e fornire, se esistono, un vettore non nullo su cui q è nulla e uno su cui q è positiva, giustificando la risposta.

---

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polonomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8 pt)**

Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 2-3k & 2k & 3k+2 & -2k \\ 2-k & 2-k & 4-2k & 0 \\ k & 2-2k & 2-3k & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5k+3 \\ 0 \\ -3-2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 febbraio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice A e $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

   (a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} A$ e fornire una base di $\operatorname{Ker} L_A$ e le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L_A$

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

   (c) Determinare la matrice N del cambio di variabile $X = N\,X'$ che permette di ottenere la forma canonica.

   (d) Determinare il segno di q e fornire, se esistono, un vettore non nullo su cui q è nulla e uno su cui q è negativa, giustificando la risposta.

---

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polonomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 7-3k & 2k-6 & 3k-11 & 6-2k \\ -2 & 1-k & 2-2k & 0 \\ k-3 & 4-2k & 7-3k & k-3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -k-1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica: