CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	9 febbraio 2017
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; sia $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice A e $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

   (a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} A$ e fornire una base di $\operatorname{Ker} L_A$ e le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L_A$

   $$\dim \operatorname{Ker} A = 1 \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \operatorname{Im} L_A = \{y - z = 0\}.$$

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

   Autovalori: $\{0, 2\}$.

   (c) Determinare la matrice N del cambio di variabile $X = N\,X'$ che permette di ottenere la forma canonica.

   $$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

   (d) Determinare il segno di q e fornire, se esistono, un vettore non nullo su cui q è nulla e uno su cui q è negativa, giustificando la risposta.

   Semidefinita positiva.

---

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polonomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

Autovalori 3 con molteplicità algebrica 2 e 0 con molteplicità algebrica 1. $B_3 = \{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$, $B_0 = \{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$

---

3. **(8 pt)**

Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 2 & 4-k \\ 2-k & 2 & 2-k & 2-k \\ 2-k & 2-k & 4-2k & 6-3k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-k \\ 2 \\ 2-k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 4$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	3	no	
1	2	2	sì	2
2	2	2	sì	2
resto	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 1, 2 \\ 2 \text{ se } k = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 1, 2$.

Soluzione per $k = 4$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 febbraio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice A e $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

   (a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} A$ e fornire una base di $\operatorname{Ker} L_A$ e le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L_A$

   $$\dim \operatorname{Ker} A = 1 \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \operatorname{Im} L_A = \{z + 3x = 0\}$$

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

   Autovalori: $\{-1, 0, 10\}$

   (c) Determinare la matrice N del cambio di variabile $X = N\,X'$ che permette di ottenere la forma canonica.

   $$N = \begin{pmatrix} 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

   (d) Determinare il segno di q e fornire, se esistono, un vettore non nullo su cui q è nulla e uno su cui q è positiva, giustificando la risposta.

   Indefinita.

---

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polonomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

Autovalori 2 con molteplicità algebrica 2 e 0 con molteplicità algebrica 1. $B_2 = \{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}$, $B_0 = \{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$

---

3. **(8 pt)**

Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -k & 4-2k \\ -k & 4-k & 4 & k \\ k+4 & 4-k & 4-3k & 4-3k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8-3k \\ 2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	3	no	
4	1	1	sì	3
resto	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 4, \\ 2 \text{ se } k = 0, \\ 1 \text{ se } k = 4. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \mathrm{Sol} = 3$ per $k = 4$.

Soluzione per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/2\\-5/2\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 febbraio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice A e $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

   (a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} A$ e fornire una base di $\operatorname{Ker} L_A$ e le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L_A$

   $$\dim \operatorname{Ker} A = 1 \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \operatorname{Im} L_A = \{x + y = 0\}.$$

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

   Autovalori: $\{-2, 0\}$.

   (c) Determinare la matrice N del cambio di variabile $X = N X'$ che permette di ottenere la forma canonica.

   $$N = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (d) Determinare il segno di q e fornire, se esistono, un vettore non nullo su cui q è nulla e uno su cui q è positiva, giustificando la risposta.

   Semidefinita negativa.

---

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polonomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

Autovalori -2 con molteplicità algebrica 2 e 0 con molteplicità algebrica 1. $B_2 = \{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\}$, $B_0 = \{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\}$

---

3. **(8 pt)**

Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix}2-3k & 2k & 3k+2 & -2k\\ 2-k & 2-k & 4-2k & 0\\ k & 2-2k & 2-3k & k\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}5k+3\\0\\-3-2k\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	2
2	1	2	sì	3
resto	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 2, \\ 2 \text{ se } k = 0, \\ 1 \text{ se } k = 2. \end{cases}$$

Risolubile $k \neq 2$

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\\-7\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 febbraio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; sia $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice A e $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

   (a) Determinare $\dim \operatorname{Ker} A$ e fornire una base di $\operatorname{Ker} L_A$ e le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L_A$

   $$\dim \operatorname{Ker} A = 1 \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L_A} = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \} \qquad \operatorname{Im} L_A = \{ z + 2y = 0 \}.$$

   (b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

   Autovalori: $\{-5, -2, 0\}$.

   (c) Determinare la matrice N del cambio di variabile $X = N\,X'$ che permette di ottenere la forma canonica.

   $$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

   (d) Determinare il segno di q e fornire, se esistono, un vettore non nullo su cui q è nulla e uno su cui q è negativa, giustificando la risposta.

   Semidefinita negativa.

---

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polonomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

Autovalori -3 con molteplicità algebrica 2 e 0 con molteplicità algebrica 1. $B_2 = \{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$, $B_0 = \{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\}$

---

3. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 7-3k & 2k-6 & 3k-11 & 6-2k \\ -2 & 1-k & 2-2k & 0 \\ k-3 & 4-2k & 7-3k & k-3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -k-1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
1	2	3	no	
3	2	2	sì	2
resto	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1,3 \\ 2 \text{ se } k = 1,3. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k \neq 1$.
$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 3$.
Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
