CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**16 gennaio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

   $$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   $\boldsymbol{u}_1$ con $\lambda = -3$ $\qquad$ $\boldsymbol{u}_3$ con $\lambda = 9$.

   (b) Per ciascuno degli autovalori trovati al punto precedente, determinare la molteplicità geometrica.

   (c) Si determinino tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   $$\lambda_1 = -3,\ \mu_1 = m_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 9,\ \mu_2 = m_2 = 1\,.$$

   (d) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   $$\mathcal{B}_{V_{-3}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{V_9} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t+3 \\ -3t+3 \\ -4t+3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x - z = 0 \\ 4y - 3z - 3 = 0. \end{cases}$$

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. $\pi = \{4x + 3y + 4z + 2 = 0\}$.

(c) Calcolare la distanza di $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ da π. $\sqrt{41}$.

(d) Detta Q l'intersezione fra r e π calcolare il prodotto scalare fra i vettori $\overrightarrow{QP_0}$ e $\overrightarrow{QP_2}$. 0 .

---

3. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 & k+1 \\ -(k+1) & k & 1 & k+2 \\ 2(k+1) & 1-k & k+4 & k+4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq -5, -1 \\ 2 \text{ se } k = -5, -1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -5$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = -1$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad X_{0alt} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**16 gennaio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

   (a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

   $$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   $$\boldsymbol{u}_2 \text{ con } \lambda = 9 \qquad \boldsymbol{u}_4 \text{ con } \lambda = 3.$$

   (b) Per ciascuno degli autovalori trovati al punto precedente, determinare la molteplicità geometrica.

   (c) Si determinino tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   $$\lambda_1 = 3,\ \mu_1 = m_1 = 1; \qquad \lambda_2 = 9,\ \mu_2 = m_2 = 2\,.$$

   (d) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   $$\mathcal{B}_{V_9} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{V_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica del piano che ha equazione cartesiana $\pi\colon x - 2y + 2z + 1 = 0$.

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r ottenuta intersecando π con il piano di equazione $y = 2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Determinare una rappresentazione cartesiana per la retta s che è parallela ad r e passante per $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 2z - 2 = 0 \\ y + 1 = 0. \end{cases}$$

(d) Calcolare la distanza di $P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ da π. 9.

---

3. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 1 & k-1 \\ -(k-1) & 1 & k & k \\ 2(k-1) & k+2 & k+7 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1, -3 \\ 2 \text{ se } k = 1, -3. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -3$,

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 1$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad X_{0alt} = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 7/10 \\ 0 \\ 1/10 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**16 gennaio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

   $$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   $$\boldsymbol{u}_3 \text{ con } \lambda = -3 \qquad\qquad \boldsymbol{u}_4 \text{ con } \lambda = 3.$$

   (b) Per ciascuno degli autovalori trovati al punto precedente, determinare la molteplicità geometrica.

   (c) Si determinino tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   $$\lambda_1 = -3,\ \mu_1 = m_1 = 1; \qquad \lambda_2 = 3,\ \mu_2 = m_2 = 2\,.$$

   (d) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   $$\mathcal{B}_{V_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{V_{-3}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta s passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ -2t+1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad s e passante per $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. $\pi = \{x + y - 2z - 9 = 0\}$.

(c) Detta P_3 l'intersezione fra s e π calcolare l'angolo fra i vettori $\overrightarrow{P_3P_0}$ e $\overrightarrow{P_3P_2}$. $\pi/2$.

(d) Calcolare la distanza di P_0 da π. $3\sqrt{3}/\sqrt{2} = 3\sqrt{6}/2 = 9/\sqrt{6}$.

---

3. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 1 & k-2 \\ -(k-2) & 1 & k-3 & k-1 \\ 2(k-2) & k+1 & 4-k & k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k+6 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 3$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 2, -2 \\ 2 \text{ se } k = 2, -2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -2$,

$\dim \text{Sol} = 2$ per $k = 2$.

Soluzione per $k = 3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 9/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad X_{0alt} = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 17/10 \\ 0 \\ 1/10 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**16 gennaio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

   (a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:

   $$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   $$\boldsymbol{u}_1 \text{ con } \lambda = -1 \qquad \boldsymbol{u}_2 \text{ con } \lambda = -7.$$

   (b) Per ciascuno degli autovalori trovati al punto precedente, determinare la molteplicità geometrica.

   (c) Si determinino tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   $$\lambda_1 = -1,\ \mu_1 = m_1 = 1; \qquad \lambda_2 = -7,\ \mu_2 = m_2 = 2\,.$$

   (d) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   $$\mathcal{B}_{V_{-7}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{V_{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica del piano che ha equazione cartesiana $\pi\colon x + 3y - 2z + 1 = 0$.

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r ottenuta intersecando π con il piano di equazione $z = 2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Determinare una rappresentazione cartesiana per la retta s che è parallela ad r e passante per $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

(d) Calcolare la distanza di $P_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ da π. $2\sqrt{14}$.

---

3. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & 0 & -1 & k-3 \\ -(k-3) & 1 & -k+2 & k-2 \\ 2(k-3) & k & -k-5 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5+k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 3, -1 \\ 2 \text{ se } k = 3, -1. \end{cases}$ Risolubile per $k \neq -1$, $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 3$.

Soluzione per $k = 1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $X_{0alt} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 11/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$.

Soluzione per $k = 0$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -5/3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $X_{0alt} = \begin{pmatrix} -5/6 \\ 9/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.
