CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	7 settembre 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Si calcoli $\operatorname{rg} A =$, $\dim \operatorname{Ker} A =$.

   (b) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (c) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   (d) Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & h+1 \\ h+1 & -h & -h-1 \\ h & h+1 & 2h+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} h-2 \\ 2-2h \\ h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) un'equazione *cartesiana* del piano π contenente A, B e C:

   (b) la retta $r = AB$ in forma cartesiana

   (c) la distanza del punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ da π:

   (d) la proiezione ortogonale di Q sulla retta n_0 ortogonale a π passante per l'origine:

---

4. **(6 pt)** Sia $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$; $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$.

   (b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

   (c) Determinare le equazioni di $\operatorname{Im} L$ in forma cartesiana mediante le coordinate sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Determinare per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+h \\ 0 \\ 1+h \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 settembre 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Si calcoli $\operatorname{rg} A =$, $\quad \dim \operatorname{Ker} A =$.

   (b) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (c) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   (d) Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & h-1 \\ h-1 & 2-h & 1-h \\ h-2 & h-1 & 2h-3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3-10h \\ 9 \\ 3-4h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) un'equazione *cartesiana* del piano π contenente A, B e C:

   (b) la retta $s = AC$ in forma cartesiana

   (c) la distanza del punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ da π:

   (d) la proiezione ortogonale di Q sulla retta n_0 ortogonale a π passante per l'origine:

---

4. **(6 pt)** Sia $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\qquad$; $\qquad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\qquad$.

   (b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

   (c) Determinare le equazioni di $\operatorname{Im} L$ in forma cartesiana mediante le coordinate sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Determinare per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} h \\ 4+h \\ 2-h \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 settembre 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Si calcoli $\operatorname{rg} A =\quad$, $\qquad \dim \operatorname{Ker} A = \quad$.

   (b) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (c) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   (d) Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1-h \\ h & 1-h & h-1 \\ 1-h & -h & -2h+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} h+2 \\ -2-2h \\ h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O,\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{\jmath}},\hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti $A=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Determinare:

(a) un'equazione *cartesiana* del piano π contenente A, B e C:

(b) la retta $r=AB$ in forma cartesiana

(c) la distanza del punto $Q=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ da π:

(d) la proiezione ortogonale di Q sulla retta n_0 ortogonale a π passante per l'origine:

---

4. **(6 pt)** Sia $L\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\qquad;\qquad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\qquad.$

(b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

(c) Determinare le equazioni di $\operatorname{Im} L$ in forma cartesiana mediante le coordinate sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e una base di $\operatorname{Ker} L$:

(d) Determinare per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2-h\\0\\1+h\\1+h\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	7 settembre 2016
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Si calcoli $\operatorname{rg} A =$, $\quad \dim \operatorname{Ker} A =$.

   (b) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (c) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   (d) Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -h-1 & 1+h & 2+h \\ -1 & -h-1 & 0 \\ -h-2 & -2h-3 & -h-1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 3+10h \\ 3+4h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

   (c) Sia $h = -\dfrac{3}{2}$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) un'equazione *cartesiana* del piano π contenente A, B e C:

   (b) la retta $s = AC$ in forma cartesiana

   (c) la distanza del punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ da π:

   (d) la proiezione ortogonale di Q sulla retta n_0 ortogonale a π passante per l'origine:

---

4. **(6 pt)** Sia $L \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \qquad ; \qquad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \qquad .$

   (b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

   (c) Determinare le equazioni di $\operatorname{Im} L$ in forma cartesiana mediante le coordinate sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e una base di $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Determinare per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2h \\ 2+h \\ 2-h \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$:
