CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 settembre 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Si calcoli $\operatorname{rg} A = 1$, $\dim \operatorname{Ker} A = 2$.

   (b) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   $$\lambda_1 = 0,\ \mu_1 = m_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 4,\ \mu_2 = m_2 = 1\,.$$

   (c) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   $$\mathcal{B}_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},\ \text{o}\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \mathcal{B}_{V_4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (d) Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.
   NO, la matrice non è simmetrica.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & h+1 \\ h+1 & -h & -h-1 \\ h & h+1 & 2h+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} h-2 \\ 2-2h \\ h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   $$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 0, -\frac{1}{2}, -2 \\ 2 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
   Per ogni $h \neq -\frac{1}{2}, -2$.

   (c) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:
   La dimensione è 1; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti $A = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Determinare:

(a) un'equazione *cartesiana* del piano π contenente A, B e C:
$\pi\colon 3x - y - 2z - 1 = 0;$

(b) la retta $r = AB$ in forma cartesiana

Equazione parametrica $r\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Equazione cartesiana:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = 1. \end{cases}$$

(c) la distanza del punto $Q = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ da π: $3\frac{\sqrt{14}}{7}$.

(d) la proiezione ortogonale di Q sulla retta n_0 ortogonale a π passante per l'origine: $(-\frac{15}{14}, \frac{5}{14}, \frac{5}{7})$.

---

4. **(6 pt)** Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

(c) Determinare le equazioni di $\operatorname{Im} L$ in forma cartesiana mediante le coordinate sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e una base di $\operatorname{Ker} L$:

$$\operatorname{Im} L\colon \begin{cases} z = 0 \\ x - y - t = 0. \end{cases} \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

(d) Determinare per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}2\\3+h\\0\\1+h\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$:

$h = -1.$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 settembre 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Si calcoli $\operatorname{rg} A = 1$, $\quad \dim \operatorname{Ker} A = 2$.

   (b) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   $$\lambda_1 = 0,\ \mu_1 = m_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 6,\ \mu_2 = m_2 = 1\,.$$

   (c) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   $$\mathcal{B}_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},\ \text{o}\ \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \mathcal{B}_{V_6} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (d) Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.
   SI', la matrice è simmetrica.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & h-1 \\ h-1 & 2-h & 1-h \\ h-2 & h-1 & 2h-3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3-10h \\ 9 \\ 3-4h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   $$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 0, \frac{3}{2}, 2 \\ 2 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
   Per ogni $h \neq 2$.

   (c) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:
   La dimensione è 1; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti $A = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) un'equazione *cartesiana* del piano π contenente A, B e C:
   $\pi\colon 3 + x - 3y - 2z = 0$;

   (b) la retta $s = AC$ in forma cartesiana

   Equazione parametrica $r\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

   Equazione cartesiana:
   $$\begin{cases} y = 1 \\ x - 2z = 0. \end{cases}$$

   (c) la distanza del punto $Q = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ da π: $4\frac{\sqrt{14}}{7}$.

   (d) la proiezione ortogonale di Q sulla retta n_0 ortogonale a π passante per l'origine: $(-\frac{11}{14}, \frac{33}{14}, \frac{11}{7})$.

---

4. **(6 pt)** Sia $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

   (b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

   (c) Determinare le equazioni di $\operatorname{Im} L$ in forma cartesiana mediante le coordinate sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e una base di $\operatorname{Ker} L$:

$$\operatorname{Im} L\colon z - x + y = 0. \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

   (d) Determinare per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}h\\4+h\\2-h\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$:

   $h = 6$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 settembre 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Si calcoli $\operatorname{rg} A = 1$, $\dim \operatorname{Ker} A = 2$.

   (b) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   $$\lambda_1 = 0,\ \mu_1 = m_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 3,\ \mu_2 = m_2 = 1\,.$$

   (c) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   $$\mathcal{B}_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \text{ o } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \mathcal{B}_{V_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (d) Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.
   NO, la matrice non è simmetrica.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1-h \\ h & 1-h & h-1 \\ 1-h & -h & -2h+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} h+2 \\ -2-2h \\ h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   $$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 0, \frac{1}{2}, 2 \\ 2 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
   Per ogni $h \neq \frac{1}{2}, 2$.

   (c) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:
   La dimensione è 1; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti $A = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) un'equazione *cartesiana* del piano π contenente A, B e C:
   $\pi\colon 3x + 2y + z - 5 = 0$;

   (b) la retta $r = AB$ in forma cartesiana

   Equazione parametrica $r\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

   Equazione cartesiana:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 3. \end{cases}$$

   (c) la distanza del punto $Q = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ da π: $5\frac{\sqrt{14}}{14}$.

   (d) la proiezione ortogonale di Q sulla retta n_0 ortogonale a π passante per l'origine: $(\frac{15}{7}, \frac{10}{7}, \frac{5}{7})$.

---

4. **(6 pt)** Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:
$$L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\-2\end{pmatrix}$; $\quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

   (b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:
$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

   (c) Determinare le equazioni di $\operatorname{Im} L$ in forma cartesiana mediante le coordinate sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e una base di $\operatorname{Ker} L$:
$$\operatorname{Im} L\colon \begin{cases} y = 0 \\ x - z + t = 0. \end{cases} \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

   (d) Determinare per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}2-h\\0\\1+h\\1+h\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$:

   $h = 2$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**7 settembre 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Si calcoli $\operatorname{rg} A = 1$, $\quad \dim \operatorname{Ker} A = 2$.

   (b) Si determinino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   $$\lambda_1 = 0,\ \mu_1 = m_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 9,\ \mu_2 = m_2 = 1\,.$$

   (c) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

   $$\mathcal{B}_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},\ \text{o}\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \mathcal{B}_{V_6} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (d) Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Motivare la risposta.
   SI', la matrice è simmetrica.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

   $$A = \begin{pmatrix} -h-1 & 1+h & 2+h \\ -1 & -h-1 & 0 \\ -h-2 & -2h-3 & -h-1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 3+10h \\ 3+4h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   $$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 0, -\frac{3}{2}, -2 \\ 2 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
   Per ogni $h \neq -2$.

   (c) Sia $h = -\frac{3}{2}$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:
   La dimensione è 1; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) un'equazione *cartesiana* del piano π contenente A, B e C:
$\pi\colon 3x - 2y - z - 6 = 0$;

(b) la retta $s = AC$ in forma cartesiana

Equazione parametrica $r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Equazione cartesiana:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y + z = -3. \end{cases}$$

(c) la distanza del punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ da π: $5\dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

(d) la proiezione ortogonale di Q sulla retta n_0 ortogonale a π passante per l'origine: $(-\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7})$.

---

4. **(6 pt)** Sia $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Determinare la matrice rappresentativa di L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Determinare le equazioni di $\operatorname{Im} L$ in forma cartesiana mediante le coordinate sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e una base di $\operatorname{Ker} L$:

$$\operatorname{Im} L\colon x + 2y + 2z = 0. \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Determinare per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2h \\ 2+h \\ 2-h \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$:

$h = -4$.
