CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	8 luglio 2016
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice simmetrica $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Si stabilisca se 1 è autovalore di Q motivando la risposta Sì perché $Q - I$ ha rango 1

   (b) Si determinino tutti gli autovalori di Q determinando le molteplicità algebriche e geometriche e una base *ortogonale* di ciascun autospazio.
   1 con autospazio $x + y + z = 0$ e base $(1, -2, 1), (1, 0, -1)$,
   4 con autospazio generato da $(1, 1, 1)$

   (c) Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $X \neq 0$ soluzione dell' equazione $X^T QX = 0$.

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -2 + 2h & 1 & 1 - h \\ -13 & 2 + h & 3 \\ -6h & 0 & 2h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 - h \\ 3h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\text{rg}\, A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 0, 2, -3 \\ 2 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
   Per ogni $h \in \mathbb{R} - \{2, -3\}$.

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 0: $h \neq 0, 2, -3$.

(d) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica: La dimensione è 1; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O,\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{\jmath}},\hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, e il vettore $\boldsymbol{v}=\hat{\boldsymbol{\imath}}+\hat{\boldsymbol{\jmath}}-2\hat{\boldsymbol{k}}$.

(a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π ortogonale a $\boldsymbol{v}$ che passa per A.

Equazione cartesiana: $x+y-2z+3=0$. Equazione parametrica

$$\pi:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(b) Rappresentare in forma *cartesiana* la retta r parallela a $\boldsymbol{v}$ e passante per B.
Equazione parametrica : $A+tv$. Equazione cartesiana:

$$\begin{cases}x-y=-1\\2x+z=1.\end{cases}$$

(c) Si determini l'intersezione di π e di r $(-1/3,2/3,5/3)$

(d) Si determini la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r.

$(1/6,7/6,2/3)4.$

---

4. **(6 pt)** Sia $V\subset\mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Sia $U\subset\mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U:=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}:x+y-z+t=0\}.$$

(a) Determinare delle equazioni cartesiane per V.

$x-z-t=0.$

(b) Determinare $\dim U\cap V$ e $\dim(U+V)$.

2 e 4

(c) Determinare una base di $V^{\perp}$.

$(-1, 0, 1, 1)$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 luglio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice simmetrica $Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Si stabilisca se 0 è autovalore di Q motivando la risposta Sì perché Q ha rango 2

   (b) Si determinino tutti gli autovalori di Q determinando le molteplicità algebriche e geometriche e una base *ortogonale* di ciascun autospazio.
   6 con autospazio $x + y - z = 0$ e base $(1, -1, 0), (1, 1, 2)$,
   0 con autospazio generato da $(-1, -1, 1)$

   (c) Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $X \neq 0$ soluzione dell' equazione $X^T Q X = 0$. Sì perché la forma quadratica è semidefinita positiva: $(-1, -1, 1)$

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+2h & -1-h \\ 4+h & -13 & 3 \\ 0 & -6-3h & 2+h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3+h \\ 2+h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\text{rg}\, A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 0, -2, -5 \\ 2 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
   Per ogni $h \in \mathbb{R} - \{-5\}$.

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 1: h = 0, -2

(d) Sia $h = -1$. Determinare le soluzioni del sistema. La dimensione è 1; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$, non $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e il vettore $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$.

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π ortogonale a $\boldsymbol{v}$ che passa per A.

   Equazione cartesiana: $x + 2y + z = 1$.

   (b) Rappresentare in forma *cartesiana* la retta r parallela a $\boldsymbol{v}$ e passante per B. Equazione parametrica : $B + tv$. Equazione cartesiana: $z - x - 2 = y -$ 2 x- 2 $= 0$ (oppure y-x-z=0

   (c) Si determini l'intersezione di π e di r $(-5/6, 1/3, 7/6)$.

   (d) Si determini la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r.

   $(-1/3, 4/3, 5/3)$.

---

4. **(6 pt)** Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : 2x + y + z + t = 0 \}.$$

   (a) Determinare delle equazioni cartesiane per V.

   $y + z = t - 2x - y = 0$.

   (b) Determinare $\dim U \cap V$ e $\dim(U + V)$.

   1 e 4

   (c) Determinare una base di $V^{\perp}$.

   $(2, 1, 0, -1), (0, 1, 1, 0)$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 luglio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice simmetrica $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Si stabilisca se 0 è autovalore di Q motivando la risposta Sì perché Q ha rango 1

   (b) Si determinino tutti gli autovalori di Q determinando le molteplicità algebriche e geometriche e una base *ortogonale* di ciascun autospazio.
   0 con autospazio $x - y + z = 0$ e base $(1, 0, -1), (1, 2, 1)$,
   -3 con autospazio generato da $(-1, 1, -1)$

   (c) Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $X \neq 0$ soluzione dell' equazione $X^T Q X = 0$. Sì perché la forma quadratica è semidefinita negativa: p. es. $(1, 2, 1)$

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 3 & -2+2h \\ -8+2h & 4-h & 2 \\ 9-3h & h-3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5-h \\ -2 \\ h-3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\text{rg}\, A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 0, 3, 5 \\ 2 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
   Per ogni $h \in \mathbb{R} - \{0, 5\}$.

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 0: $h \neq 0, 3, 5$

(d) Sia $h = 3$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica: La dimensione è 1; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -18 \\ 7 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e il vettore $\boldsymbol{v} = 2\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$.

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π ortogonale a $\boldsymbol{v}$ che passa per A.

   Equazione cartesiana: $2x - y - z = 9$.

   (b) Rappresentare in forma *cartesiana* la retta r parallela a $\boldsymbol{v}$ e passante per B. Equazione parametrica : $B + tv$. Equazione cartesiana: $y - z - 1 = x + y + z - 2 = 0$

   (c) Si determini l'intersezione di π e di r $(11/3, -1/3, -4/3)$

   (d) Si determini la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r.

   $(2/3, 7/6, 1/6)$

---

4. **(6 pt)** Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x + y - z - t = 0 \}.$$

   (a) Determinare delle equazioni cartesiane per V.

   $t + y - z = 0$.

   (b) Determinare $\dim U \cap V$ e $\dim(U + V)$.

   2 e 4

   (c) Determinare una base di $V^{\perp}$.

   $(0, 1, -1, 1)$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 luglio 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6 pt)** Si consideri la matrice simmetrica $Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Si stabilisca se -2 è autovalore di Q motivando la risposta Sì perché $Q + 2I$ ha rango 1

   (b) Si determinino tutti gli autovalori di Q determinando le molteplicità algebriche e geometriche e una base *ortogonale* di ciascun autospazio.
   -2 con autospazio $x - y - z = 0$ e base $(1, 2, -1), (1, 0, 1)$,
   -5 con autospazio generato da $(-1, 1, 1)$

   (c) Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $X \neq 0$ soluzione dell' equazione $X^T QX = 0$. No perché la forma quadratica è definita negativa

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & h+4 & -8-2h \\ 2+2h & 3 & -13 \\ 0 & -h-3 & 3h+9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+h \\ 3+h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\text{rg}\, A = \begin{cases} 3 \text{ se } h \neq 0, -3, -5 \\ 2 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:
   Per ogni $h \in \mathbb{R} - \{0\}$.

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 1: h = -3, -5

(d) Sia $h = -4$. Determinare le soluzioni del sistema. La soluzione è unica ed è: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$.

---

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, e il vettore $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} - 2\hat{\boldsymbol{k}}$.

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π ortogonale a $\boldsymbol{v}$ che passa per A.

   Equazione cartesiana: $x - y - 2z + 6 = 0$.

   (b) Rappresentare in forma *cartesiana* la retta r parallela a $\boldsymbol{v}$ e passante per B. Equazione parametrica : $B + tv$. Equazione cartesiana: $x + y - 1 = x - y + z - 2 = 0$

   (c) Si determini l'intersezione di π e di r $(1/6, 5/6, 8/3)$

   (d) Si determini la proiezione ortogonale del punto C sulla retta r.

   $(5/6, 1/6, 4/3)$

---

4. **(6 pt)** Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

   Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U := \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} : x - y + z + 2t = 0\}.$$

   (a) Determinare delle equazioni cartesiane per V.

   $y - z = 2t - x - y = 0.$

   (b) Determinare $\dim U \cap V$ e $\dim(U + V)$.

   1 e 4

   (c) Determinare una base di $V^{\perp}$.

   $(-1, -1, 0, 2), (0, -1, 1, 0)$
