CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	20 giugno 2016
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. **(6pt)** Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e C di coordinate $\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione parametrica della retta r che passa per A e B.
   x=1-t, y=1, z=t

   (b) Si stabilisca se i punti A, B, C sono allineati. si

   (c) Si determini l'intersezione P del piano π ortogonale a r passante per C con l'asse Ox. π ha equazione $x - z = 9$ dunque $P = (9, 0, 0)$

   (d) Si determini la proiezione ortogonale di P sulla retta r. C chiaramente

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix}2h & 0 & 2\\ 1 & h & 1+h\\ 2 & 0 & 1+h\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}-2h\\ 3\\ h\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\text{rg}\, A = \begin{cases} 2 \text{ se } h \notin \{-2, 0, 1\} \\ 3 \text{ altrimenti}\end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: Se e solo se $h \in \boldsymbol{R} - \{0, 1\}$.

   (c) Determinare per quali valori di h la varietà lineare delle soluzioni del sistema ha dimensione 1: $h = -2$

   (d) Sia $h = -2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica: La dimensione è 1; soluzione: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$. $\alpha \in \mathbb{R}$.

---

3. **(6 pt)** Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ definito come luogo delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y - 3z + 4t = 0 \\ x + 5z - 2t = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini dimensione di U e di $U^\perp$. Entrambi hanno dimensione 2

(b) Si determini una base di U. $(2, -3, 0, 1), (-5, 4, 1, 0)$

(c) Si determini una base ortogonale di $U^\perp$. $(1, 1, 1, 1), (0, 1, -4, 3)$

---

4. **(6 pt)** Si considerino le seguente matrici quadrate:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A e di B con relative molteplicità algebriche e geometriche.. Per entrambe le matrici $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 1$.

(b) Determinare una base di $\boldsymbol{R}^3$ formata di autovettori di A.
Gli autospazi sono

$$V_{-1} = \{2x + 3y = z = 0\}, \quad V_4 = \{z = x - y = 0\}, \quad V_1 = \{x = y = 0\}.$$

Base

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di B. Gli autospazi sono

$$V_{-1} = \{2x+3y = x+y+2z = 0\}, \quad V_4 = \{x-y = 2x-3z = 0\}, \quad V_1 = \{x = y = 0\}.$$

(d) Le matrici A e B sono diagonalizzabili? Sono simili? Giustificare esplicitamente la risposta. Sono entrambe diagonalizzabili perché hanno entrambe 3 autovalori distinti. Sono simili perché hanno gli stessi autovalori.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**20 giugno 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6pt)** Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ e C di coordinate $\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione parametrica della retta r che passa per A e B. x=t, y=0, z=t

   (b) Si stabilisca se i punti A, B, C sono allineati. no

   (c) Si determini l'intersezione P del piano π ortogonale a r passante per C con l'asse Ox. π ha equazione $x + z = 1$ dunque $P = (1, 0, 0)$

   (d) Si determini la proiezione ortogonale di P sulla retta r. 1/2(1,0,1)

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix}2h & 0 & 0\\ 1 & h-1 & h+1\\ -1 & 1 & h-1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}-2h\\ 3\\ h-3\end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 1 \text{ se } h = 0 \\ 2 \text{ se } h = 3 \\ 3 \text{ se } h \notin \{0, 3\} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette una ed una sola soluzione: Se e solo se $h \in \boldsymbol{R} - \{0, 3\}$.

   (c) Determinare per quali valori di h il sistema non ha nessuna soluzione: $h = 3$

   (d) Sia $h = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica: La dimensione è 2; soluzione: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}. \, y, z \in \mathbb{R}$.

3. **(6 pt)** Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ definito come luogo delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y-4z+t=0 \\ x-y+2z-2t=0 \end{cases}$$

(a) Si determini dimensione di U e di $U^{\perp}$. $\dim U = 1$ e $\dim U \perp = 3$

(b) Si determini una base di U.
$(3, -5, -1, 3)$

(c) Si determini una base ortogonale di $U^{\perp}$.
$(1, 1, 1, 1), (1, 2, -4, 1), (3/2, 0, 0, -3/2)$

---

4. **(6 pt)** Si considerino le seguente matrici quadrate:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A e di B con relative molteplicità algebriche e geometriche..
Per A: $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 7$. Per B: $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 5$.

(b) Determinare una base di $\boldsymbol{R}^3$ formata di autovettori di A.
Gli autospazi sono

$$V_1 = \{x = y + z = 0\}, \quad V_4 = \{x = 0, z = 2y\}, \quad V_7 = \{y = z = 0\}.$$

Base

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di B.
Gli autospazi sono

$$V_1 = \{x = y+z = 0\}, \quad V_4 = \{x = 2y-z = 0\}, \quad V_5 = \{x+y-z = 5y-3z = 0\}.$$

(d) Le matrici A e B sono diagonalizzabili? Sono simili? Giustificare esplicitamente la risposta. Sono entrambe diagonalizzabili perché hanno entrambe 3 autovalori distinti. Non sono simili perché hanno autovalori diversi.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**20 giugno 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6pt)** Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e C di coordinate $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione parametrica della retta r che passa per A e B. x=-1+t, y=t, z=1

   (b) Si stabilisca se i punti A, B, C sono allineati. si

   (c) Si determini l'intersezione P del piano π ortogonale a r passante per C con l'asse Ox. π ha equazione $x + y = -9$ dunque $P = (-9, 0, 0)$

   (d) Si determini la proiezione ortogonale di P sulla retta r. C chiaramente

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2h & 0 & 2 \\ 1 & h & 1+h \\ 2 & 0 & 1+h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-h \\ 1 \\ h \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\text{rg}\, A = \begin{cases} 2 \text{ se } h \notin \{0, 1, -2\} \\ 3 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: Se e solo se $h \in \boldsymbol{R} - \{0\}$.

   (c) Determinare per quali valori di h il sistema ammette più di una soluzine: $h = 1, -2$.

   (d) Sia $h = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica: La dimensione è 1; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \alpha \in \mathbb{R}.$

---

3. **(6 pt)** Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ definito come luogo delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-2y+3z+5t=0 \\ x+5y-2t=0 \end{cases}$$

(a) Si determini dimensione di U e di $U^\perp$. Entrambi hanno dimensione 2

(b) Si determini una base di U.

$(2, 0, -3, 1), (-5, 1, 4, 0)$

(c) Si determini una base ortogonale di $U^\perp$.

$(1, 1, 1, 1), (0, -4, 1, 3)$

---

4. **(6 pt)** Si considerino le seguente matrici quadrate:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A e di B con relative molteplicità algebriche e geometriche..

Per entrambe le matrici $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 7$.

(b) Determinare una base di $\boldsymbol{R}^3$ formata di autovettori di A.

Gli autospazi sono

$$V_1 = \{z = x + 2y = 0\}, \quad V_4 = \{z = x - y = 0\}, \quad V_7 = \{x = y = 0\}.$$

Base

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di B.

Gli autospazi sono

$$V_1 = \{x+2y = x+y+6z = 0\}, \quad V_4 = \{x-y = x+y+3z = 0\}, \quad V_7 = \{x = y = 0\}.$$

(d) Le matrici A e B sono diagonalizzabili? Sono simili? Giustificare esplicitamente la risposta.

Sono entrambe diagonalizzabili perché hanno entrambe 3 autovalori distinti. Sono simili perché hanno gli stessi autovalori.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**20 giugno 2016**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(6pt)** Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ e C di coordinate $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione parametrica della retta r che passa per A e B. x=t, y=-2t, z=0

   (b) Si stabilisca se i punti A, B, C sono allineati. no

   (c) Si determini l'intersezione P del piano π ortogonale a r passante per C con l'asse Ox. π ha equazione $x - 2y = 3$ dunque $P = (3, 0, 0)$

   (d) Si determini la proiezione ortogonale di P sulla retta r. 3/5(1,-2,0)

---

2. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 2h & 0 & 0 \\ 1 & h-1 & h+1 \\ -1 & 1 & h-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2h \\ h \\ h-3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

$$\text{rg}\, A = \begin{cases} 1 \text{ se } h = 0 \\ 2 \text{ se } h = 3 \\ 3 \text{ se } h \notin \{0, 3\} \end{cases}$$

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema ammette una soluzione unica: Se e solo se $h \in \boldsymbol{R} - \{0, 3\}$.

   (c) Determinare per quali valori di h il sistema non ammette soluzioni: Per $h = 0$.

   (d) Sia $h = 3$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

   La dimensione è 1; soluzione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $z \in \mathbb{R}$.

---

3. **(6 pt)** Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ definito come luogo delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-4y+z+2t=0 \\ x+2y-2z-t=0 \end{cases}$$

(a) Si determini dimensione di U e di $U^\perp$. $\dim U = 1$ e $\dim U \perp = 3$

(b) Si determini una base di U.

$(3,-1,3,-5)$

(c) Si determini una base ortogonale di $U^\perp$.

$(1,1,1,1),(1,-4,1,2),(3/2,0,-3/2,0)$

---

4. **(6 pt)** Si considerino le seguente matrici quadrate:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A e di B con relative molteplicità algebriche e geometriche..

Per A: $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 7$. Per B: $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 5$.

(b) Determinare una base di $\boldsymbol{R}^3$ formata di autovettori di A.

Gli autospazi sono

$$V_{-1} = \{y = x+z = 0\}, \quad V_4 = \{y = 0, 3z = 2x\}, \quad V_7 = \{x = z = 0\}.$$

Base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di B.

Gli autospazi sono

$$V_1 = \{x = y+z = 0\}, \quad V_4 = \{x = 2y-3z = 0\}, \quad V_5 = \{2x-3y+3z = 5y-7z = 0\}.$$

(d) Le matrici A e B sono diagonalizzabili? Sono simili? Giustificare esplicitamente la risposta. Sono entrambe diagonalizzabili perché hanno entrambe 3 autovalori distinti. Non sono simili perché hanno autovalori diversi.
