Corso di Geometria e Algebra
Programma svolto
anno accademico 2019/2020

13 gennaio 2020

7/10, 11-13 aula A1.

1. Insiemi. Elementi. Sottoinsiemi. Operazioni sugli insiemi: intersezione.
2. Insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$.
3. Insieme vuoto $\varnothing$.
4. Simboli $\forall, \exists, \Rightarrow$.
5. Intersezione e prodotto cartesiano di insiemi.

10/10, 14-16 aula A1.

1. Unione, complementare.
2. $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$.
3. $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$.
4. Funzioni. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Funzione inversa.
5. Negazione di proposizioni che contengono $\forall$ e $\exists$.
6. Operazioni binarie su insieme. Prodotto e somma di numeri reali. Proprietà commutativa e associativa, elemento neutro, inverso di un elemento.
7. Somma in $\mathbb{R}^2$.

11/10, 11-13 aula A1.

1. Prodotto per uno scalare in $\mathbb{R}^2$.
2. Vettori geometrici nel piano e nello spazio. Insiemi $\mathbb{E}^2$ e $\mathbb{E}^3$.
3. Somma di vettori geometrici (regola del parallelogramma).

4. Prodotto di uno scalare per un vettore geometrico.
5. Riferimenti in $\mathbb{E}^2$. Funzione:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ &\vec{v} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{se } \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}. \end{aligned}$$

   Questa funzione è biunivoca e rispetta l'operazione di somma e di prodotto per uno scalare.
6. Simbolo $\Leftrightarrow$.
7. Siano dati due vettori geometrici $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$. Diciamo che essi sono *proporzionali* se esiste uno scalare $\lambda \neq 0$ tale che $\vec{w} = \lambda\vec{v}$. I due vettori geometrici $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno la stessa direzione se e soltanto se sono proporzionali.

14/10, 11-13.

1. Operazioni su $\mathbb{R}^n$. Proprietà delle operazioni. Definizione di spazio vettoriale astratto.
2. Vettori applicati in O. Insieme $\mathbb{E}_O$.
3. Riferimenti in $\mathbb{E}^3$. Funzione:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}^3, \\ &\vec{v} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{se } \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \end{aligned}$$

   Questa funzione è biunivoca. Infatti a vettori distinti corrispondono terne distinte (la funzione è iniettiva) e ogni terna corrisponde a un vettore (la funzione è suriettiva). La funzione inversa è la funzione che associa

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^3 \to \mathbb{E}^3, \\ &\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \end{aligned}$$

4. Fissata una origine $O \in \pi$ c'è una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano π e i vettori geometrici del piano: al punto $P \in \pi$ associo il vettore $\vec{OP}$ e al vettore $\vec{v}$ associo il punto $P = O + \vec{v}$.
5. Se A, B, C sono tre punti del piano, allora $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Inoltre $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ e $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

6. Equazione parametrica della retta in forma vettoriale. Dato un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ e un punto P_0, l'insieme $\{P = P_0 + t\vec{v}\}$ è la retta passante per P_0 con direzione $\vec{v}$.
7. Componenti di un vettore geometrico rispetto ad un riferimento fissato.
8. Coordinate di un punto rispetto ad un riferimento fissato.
9. Equazione parametrica della retta in coordinate.
10. Equazione parametrica della retta passante per due punti.

17/10, 14-16

1. Se $\vec{v}$ ha componenti $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w}$ ha componenti $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, allora $\vec{v} + \vec{v}'$ ha componenti $\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$, mentre $t\vec{v}$ ha componenti $\begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \\ tv_3 \end{pmatrix}$.
2. Se $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, allora $P + \vec{v} \equiv \begin{pmatrix} x_0 + v_1 \\ y_0 + v_2 \\ z_0 + v_3 \end{pmatrix}$.
3. Equazione parametrica del piano: $P = P_0 + s\vec{v} + t\vec{w}$. Affinché questa sia l'equazione di un piano, i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ devono essere entrambi diversi dal vettore nullo e non paralleli.
4. Ortogonalità di vettori. Il vettore nullo è per definizione ortogonale a qualsiasi vettore.
5. Proiezione $\vec{v}'$ di un vettore $\vec{v}$ parallela a un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$.
6. Proiezione $\vec{v}''$ di un vettore $\vec{v}$ ortogonale a un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$.
7. La proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ (cioè parallela a $\vec{u}$) è il vettore
$$\vec{v}' := \frac{||\vec{v}|| \cdot \cos\theta}{||\vec{u}||}\vec{u}.$$
8. Il prodotto scalare fra due vettori geometrici.

18/10, 11-13

1. Proprietà di linearità delle proiezioni: se $\vec{v}'$ è la proiezione di $\vec{v}$ lungo $\vec{u}$ e $\vec{v}''$ è la proiezione ortogonale ad $\vec{u}$, allora
$$(t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2)' = t_1\vec{v}_1' + t_2\vec{v}_2',$$
$$(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2)'' = t_1\vec{v}_1'' + t_2\vec{v}_2''.$$

2. Proprietà del prodotto scalare: bilinearità, simmetria, positività.

3. Fissato un riferimento cartestiano ortonormale $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ il prodotto scalare si può calcolare in termini delle componenti dei due vettori:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

4. Indichiamo con $\mathscr{E}$ l'insieme di tutti i punti dello spazio euclideo. Dato un vettore non nullo $\vec{n}$ e un punto P_0, il piano ortogonale ad $\vec{n}$ e passante per P_0 è $\pi = \{P \in \mathscr{E} : \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n} \rangle = 0\}$.

5. Equazione cartesiana del piano.

6. Due piani $\pi = \{P \in \mathscr{E} : \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n} \rangle = 0\}$ e $\pi' = \{P \in \mathscr{E} : \langle \overrightarrow{P_1P}, \vec{n}' \rangle = 0\}$ sono paralleli se e solo se i vettori normali $\vec{n}$ e $\vec{n}'$ sono proporzionali.

7. Equazioni cartesiane della retta. L'intersezione di due piani π e π' è una retta se e solo se i due piani non sono paralleli se e solo se i vettori $\{\vec{n}$ e $\vec{n}'\}$ sono entrambi non nulli e non paralleli.

8. Passaggio da equazioni parametriche a equazioni cartesiane per rette e piani.

9. Passaggio da equazioni cartesiane a equazioni parametriche per rette e piani.

21/10, 11-13

1. Sia V uno spazio vettoriale e $v \in V$. Definizione di $\operatorname{Span}(v)$. $\operatorname{Span}(0) = \{0\}$.

2. Combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_n$.

3. Cosa vuol dire che un vettore è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$.

4. Spazio generato da $v_1, \ldots, v_k$, notazione: $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_k)$.

5. $0 \in \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_k)$.

6. $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_n) \subset \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m})$.

7. Definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale.

8. Per ogni spazio vettoriale V, i sottoinsiemi $\{0\}$ e V sono sottospazi di V.

9. Lo spazio generato è un sottospazio.

10. Sottospazi di $\mathbb{E}^3$ e loro significato geometrico.

11. Giacitura di una retta. Due rette sono parallele (o uguali) se hanno la stessa giacitura.

12. Giacitura di un piano. Due piani sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

13. Sia $r = P_0 + \mathrm{Span}(v)$ e sia $P_1 \in r$. Allora $r = P_1 + \mathrm{Span}(v)$. Quindi come P_0 posso scegliere un qualunque punto sulla retta.

24/10, 14-16

1. Siano date due equazioni parametriche di rette:

$$\begin{aligned} r: \ & P = P_0 + \lambda \vec{v} \\ r': \ & P = P_1 + \lambda \vec{w}. \end{aligned}$$

   Allora $r \parallel r' \Leftrightarrow \mathrm{Span}(\vec{v}) = \mathrm{Span}(\vec{w})$.

2. Invece $r = r'$ se e solo se $\mathrm{Span}(\vec{v}) = \mathrm{Span}(\vec{w})$ e $\overrightarrow{P_0P_1} \in \mathrm{Span}(\vec{v})$.

3. Sia $\pi = P_0 + \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Se $P_1 \in \pi$, allora $\pi = P_1 + \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

4. Siano date due equazioni parametriche

$$\begin{aligned} r: \ & P = P_0 + \lambda \vec{v} \\ r': \ & P = P_1 + \lambda \vec{w}. \end{aligned}$$

   Allora $r \cap r' \neq \varnothing$ se e solo se $\overrightarrow{P_0P_1} \in \mathrm{Span}(\vec{v}, \vec{w})$.

5. Due piani sono paralleli se e solo se i vettori normali sono proporzionali.

6. Siano date due equazioni parametriche di piani:

$$\begin{aligned} \pi &= P_0 + \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \\ \pi' &= P_1 + \mathrm{Span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2). \end{aligned}$$

   Allora $\pi = \pi'$ se e solo se $\overrightarrow{P_0P_1} \in \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathrm{Span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$, cioè le due giaciture coincidono e $\vec{P_0P_1}$ appartiene alla comune giacitura.

7. Retta parallela a una retta data e passante per un punto.

8. Piano parallelo a un piano dato e passante per un punto.

9. Se $\vec{n}$ è il vettore normale al piano π, allora la giacitura di π è $W := \{\vec{v} \in \mathbb{E}^3 : \vec{v} \perp \vec{n}\}$.

10. Equazione cartesiana di un piano passante per 3 punti non allineati.

11. Equazione parametrica di un piano passante per 3 punti non allineati.

25/10, 11-13

1. Proiezione di un punto su una retta.
2. Proiezione di un punto su un piano.
3. Distanza di un punto da un piano. Se π ha equazione cartesiana $ax+by+cz+d=0$, e $P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, allora
$$d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$
4. Vettori linearmente indipendenti. Se V è uno spazio vettoriale, una lista di vettori $\{v_1,\dots,v_n\}$ è linearmente indipendente se tutti i vettori sono $\neq \underline{0}$ e nessuno di essi è combinazione lineare degli altri.
5. Data una lista di vettori $\{v_1,\dots,v_n\}$ in uno spazio vettoriale le seguenti condizioni sono equivalenti:

   A) $\{v_1,\dots,v_n\}$ è una lista linearmente indipendente;

   B) $v_1 \neq \underline{0}$,
   $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$,
   $\dots,$
   $v_k \notin \mathrm{Span}(v_1,\dots,v_{k-1})$,
   $\dots,$
   $v_n \notin \mathrm{Span}(v_1,\dots,v_{n-1})$.

   C) Se $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sono numeri reali e $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \underline{0}$, allora i numeri λ_i sono tutti nulli.

28/10, 11-13

1. Regole di calcolo in uno spazio vettoriale
   - legge di cancellazione: se $u+v=u+w$, allora $v=w$;
   - $0\cdot v = 0$;
   - $(-1)\cdot v = -v$;
   - $\lambda \cdot 0 = 0$;
   - se $\lambda \neq 0$ e $v \neq 0$, allora $\lambda \cdot v \neq 0$.
2. Interpretazione dell'indipendenza lineare nel caso $V=\mathbb{E}^3$. $\{\vec{v}\}$ è indipendente se $\vec{v} \neq \vec{0}$. $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ è indipendente se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono entrambi diversi dal vettore nullo e non sono paralleli.
3. $P = P_0 + t\vec{v}$ è l'equazione parametrica di una retta se $\{\vec{v}\}$ è una lista indipendente.

4. $P = P_0 + t\vec{v} + s\vec{w}$ è l'equazione parametrica di un piano se $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ è una lista indipendente.

5. Sia $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una lista linearmente indipendente in $\mathbb{E}^3$. Poniamo $\pi := O + \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Allora la lista $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è linearmente indipendente se e solo se il terzo vettore $\vec{v}_3$ "esce" dal piano π.

6. Posizioni reciproche di rette. Siano $r = P_0 + \mathrm{Span}(\vec{u})$ e $r' = P_1 + \mathrm{Span}(\vec{v})$ due rette. Allora r ed r' sono parallele se e solo se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ è una lista linearmente dipendente.

7. Supponiamo che r ed r' non siano parallele, cioè che $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ sia una lista linearmente indipendente. Allora ci sono due possibilità:

   (a) se $\overrightarrow{P_0P_1} \in \mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v})$, le rette sono incidenti, cioè $r \cap r' \neq \varnothing$.

   (b) Se invece $\overrightarrow{P_0P_1} \notin \mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v})$, allora le rette sono sghembe, cioè $r \cap r' = \varnothing$ ed r ed r' non sono parallele.

8. Posizioni reciproche di una retta e un piano. Se $r : P = P_0 + t\vec{v}$ e $\pi = \{P : \overrightarrow{P_1P} \perp \vec{n}\}$, allora

   (a) $r \parallel \pi$ sse $\vec{v} \perp \vec{n}$.

   (b) $r \subset \pi$ sse $\vec{v} \perp \vec{n}$ e $P_0 \in \pi$.

   (c) r e π sono incidenti sse $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \neq 0$.

   (d) r e π sono ortogonali sse $\vec{v} \in \mathrm{Span}(\vec{w})$.

9. Il sistema di equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

   descrive una retta se e solo se la lista

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\}$$

   è linearmente indipendente.

10. La lineare indipendenza riguarda le liste di vettori, non i singoli vettori. Per esempio se

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   allora $\{v_1, v_2\}$ è una lista indipendente, mentre $\{v_1, v_3\}$ non lo è. Tuttavia spesso per brevità si dice "i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti", intendendo che la lista $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è linearmente indipendente.

31/10, 14-16

1. Esempio di spazio vettoriale: se E è un insieme non vuoto e V è l'insieme di tutte le funzioni da E in $\mathbb{R}$, posso definire somma e prodotto per uno scalare su V. Con queste operazioni V è uno spazio vettoriale.

2. Polinomi. Grado di un polinomio. $\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$.

3. L'insieme di tutti i polinomi con le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare naturali è uno spazio vettoriale.

4. Un sottoinsieme $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale se e solo se è non vuoto e chiuso rispetto alle combinazioni lineari.

5. *Equazioni lineari omogenee* in n incognite:

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

6. *Sistemi lineari omogenei.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

   Questo è un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite. Il simbolo a_{ij} indica il coefficiente di x_j nell'i-esima equazione.

7. L'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Se l'equazione non è banale (cioè se i coefficienti non sono tutti nulli) tale insieme si chiama *iperpiano* di $\mathbb{R}^n$.

8. L'intersezione di sottospazi è un sottospazio.

9. Dato un sistemi lineare omogeneo di k equazioni in n incognite, le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

10. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

4/11, 11-13

1. Se W è un sottospazio di V, allora $0 \in W$.

2. Le soluzioni di una equazione lineare in n incognite formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se l'equazione è omogenea.

3. Le soluzioni di un sistema lineare in n incognite formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se il sistema è omogeneo.

4. Fissiamo un riferimento cartesiano $\mathscr{R} = O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$. Tramite la funzione biunivoca che associa a un punto le sue coordinate nel riferimento $\mathscr{R}$, possiamo mettere in corrispondenza i punti con le terne di $\mathbb{R}^3$. Allora i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ (diversi da $\{0\}$ ed $\mathbb{R}^3$) corrispondono alle rette per l'origine e ai piani per l'origine. Il sottospazio banale $\{0\}$ corrisponde all'origine e il sottospazio $\mathbb{R}^3$ corrisponde a tutto lo spazio geometrico.

5. Se $W \subset V$ è un sottospazio, allora ci sono operazioni indotte su W e con queste operazioni W è esso stesso uno spazio vettoriale.

6. I polinomi formano un sottospazio dello spazio vettoriale delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

7. Lista di generatori di uno spazio vettoriale V.

8. Spazi vettoriali finitamente generati.

9. Base di uno spazio vettoriale V.

10. Sia $\mathscr{L} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una lista di vettori dello spazio vettoriale V. Sia $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ la funzione
$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

11. F è iniettiva se e solo se $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente.

12. F è suriettiva se e solo se $\mathscr{L}$ è una lista di generatori.

13. **Teorema della Base**: se V è uno spazio vettoriale finitamente generato e non banale, allora tutte le basi di V sono formate dallo stesso numero di elementi. Questo numero viene chiamato **dimensione** di V.

14. Spazio vettoriale banale. Pongo $\dim\{0\} = 0$.

7/11, 14-16

1. Lo spazio vettoriale dei polinomi non è finitamente generato.

2. Algoritmo di estrazione.

3. Coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base $\mathscr{B}$ di V: $[v]_{\mathscr{B}}$.

4. Matrici $m \times n$, colonne A^j, righe A_i, elementi di posto (i, j), $A = (a_{ij})$.

5. Somma di matrici. Prodotto di uno scalare per una matrice. $M(m, n)$ è uno spazio vettoriale.

6. Prodotto righe per colonne. Siano $A \in M(m, n)$ e $B \in M(n, k)$ e sia $C = A \cdot B$. Allora
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

8/11, 11-13

1. Definizione di *iperpiano*.

2. Algoritmo di completamento. Se $\mathscr{L}$ è una lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale finitamente generato, allora posso scegliere una lista di vettori $\mathscr{L}'$ tale che $\mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$ sia una base.

3. Se ad una base aggiungo o tolgo un vettore non è più una base.

4. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathscr{L}$ è una lista linearmente indipendente formata da n elementi, allora è una base.

5. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathscr{L}$ è una lista di generatori di V formata da n elementi, allora è una base.

6. L'unione di sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V in generale non è un sottospazio vettoriale di V.

7. Somma di due sottospazi.

8. Somma di k sottospazi: $W_1 + \cdots + W_k \subset V$.

9. Formula di Grassmann.

10. Se $\dim W + \dim Z > \dim V$, allora $W \cap Z \neq \{0\}$.

11/11, 11-13.

1. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathscr{L}$ è una lista linearmente indipendente, allora $\mathscr{L}$ contiene al più n elementi. Se $\mathscr{L}$ contiene esattamente n elementi, allora è una base.

2. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathscr{L}$ è un sistema di generatori di V, allora $\mathscr{L}$ contiene almeno n elementi. Se $\mathscr{L}$ contiene esattamente n elementi, allora è una base.

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathscr{L}$ una lista di n vettori distinti di V. Allora $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente se e soltanto se è un sistema di generatori se e soltanto se è una base.

4. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $W \subseteq V$ è un sottospazio, allora $\dim W \leq \dim V$. Se $\dim W = \dim V$, allora $W = V$.

5. Somma diretta di due sottospazi. In generale, se U e W sono in somma diretta e $v \in U + W$, il modo di scrivere v come somma di un elemento di U ed uno di W non è unico. Se la somma è diretta invece è unico.

6. Sottospazio complementare.

7. Se $A = (A^1|\cdots|A^n)$ e
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$
allora
$$A \cdot X := x_1 A^1 + \cdots x_n A^n. \tag{1}$$

14/11, 14-16

1. Se A è $m \times n$ e B è $n \times k$ allora
$$A \cdot B := (AB^1|\cdots|AB^n). \tag{2}$$

2. Le ultime formule permettono di dare una definizione alternativa, ma perfettamente equivalente, del prodotto fra matrici: posso usare la formula (1) come definizione di $A \cdot X$; poi grazie alla formula (2) posso ridurre il prodotto $A \cdot B$, al prodotto fra A e i vettori colonna B^j. Le formule (1) ed (2) dimostrano che le due definizioni danno lo stesso risultato.

3. Siano $A, A' \in M(m, n)$ e $B \in M(n, k)$. Allora $(A + A')B = AB + A'B$.

4. Siano $A \in M(m, n)$ e $B, B' \in M(n, k)$. $A(B + B') = AB + AB'$.

5. Siano $A \in M(m, n)$, $B \in M(n, k)$ e $C \in M(k, p)$. Allora $(AB)C = A(BC)$.

6. In generale $AB \neq BA$.

7. La matrice identica I_n è l'elemento neutro della moltiplicazione di matrici.

8. Se $n > 1$ è possibile trovare due matrici $A, B \in M(n)$ tali che $AB = 0$ e $A \neq 0$ e $B \neq 0$. Un esempio è
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Le matrici A e B non sono invertibili. Quindi mentre in $M(1) = \mathbb{R}$ tutti i numeri diversi da 0 sono invertibili, per $n \geq 2$ esistono matrici $A \in M(n)$ che non sono nulle, ma non sono invertibili.

15/11. 11-13

1. Il prodotto fra matrici permette di scrivere in forma compatta i sistemi lineari. Un sistema di m equazioni in n incognite corrisponde a una equazione della forma $AX = B$, dove $A \in M(m, n)$, $X \in \mathbb{R}^n$ (vettore delle incognite) e $B \in \mathbb{R}^m$.

2. Matrici invertibili. Definizione di $\mathrm{GL}(n)$.

3. Se $AX = B$ è un sistema quadrato (cioè A è $n \times n$) e A è invertibile, allora la soluzione del sistema è $X = A^{-1}B$.

4. L'inversa di una matrice invertibile è unica.

5. $I_n \in \mathrm{GL}(n)$ e $(I_n)^{-1} = I_n$.

6. Se $A \in \mathrm{GL}(n)$, anche $A^{-1} \in \mathrm{GL}(n)$ e $(A^{-1})^{-1} = A$.

7. Se $A_1, A_2 \in \mathrm{GL}(n)$, allora anche $A_1 \cdot A_2 \in \mathrm{GL}(n)$
$$(A_1 \cdot A_2)^{-1} = A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

8. Nucleo di una matrice $m \times n$: $\ker A$. È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9. Sistemi quadrati.

10. Sia $A \in M(n)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:
    (a) $A \in \mathrm{GL}(n)$.
    (b) Per ogni $B \in \mathbb{R}^n$ il sistema lineare $AX = B$ ha una unica soluzione.
    (c) $\ker A = \{0\}$.
    (d) Le colonne di A formano una base di $\mathbb{R}^n$.

18/11, 11-13.

1. $Ae_j = A^j$.

2. Se $A \in \mathrm{GL}(n)$ e $\mathscr{B} = \{A^1, \ldots, A^n\}$, indico con $[x]_{\mathscr{B}}$ le coordinate del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base $\mathscr{B}$. Allora
$$A^{-1} = (B^1 | \cdots | B^n), \qquad \text{dove } B^j := [e_j]_{\mathscr{B}}.$$
(Con e_j si indicano come al solito i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.)

3. Se $A \in \mathrm{GL}(n)$, $B \in M_n$ e $AB = 0$, allora $B = 0$.

4. Se A è una matrice $n \times n$ indichiamo con A_{ij} o $A_{[ij]}$ la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando da A la i-esima riga e la j-esima colonna.

5. Determinante di matrici 2×2.

6. Una matrice 2×2 è invertibile se e solo se ha determinate $\neq 0$.

7. Determinante di matrici 3×3.

8. Formula generale per il determinante di una matrice $n \times n$ sviluppando lungo la prima colonna:
$$\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}.$$

9. Teorema di Laplace: si può sviluppare il determinante secondo una colonna qualsiasi. Lo sviluppo di Laplace secondo la j-esima colonna è

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

10. Matrici triangolari superiori e inferiori. Il loro determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

11. $\det I_n = 1$.

12. Proprietà del determinante:

13. Se $A^j = 0$, allora $\det A = 0$.

14. Scambiando due colonne il determinante cambia di segno. Per esempio se $A = (A^1|A^2|A^3|\cdots|A^n) \in M(n)$,

$$\det(A^2|A^1|A^3|\cdots|A^n) = -\det A.$$

21/11. 14-16

1. Se una colonna di A è nulla, allora $\det A = 0$.

2. $\det(\lambda A^1|A^2|\cdots|A^n) = \lambda \cdot \det A$. Lo stesso se moltiplico un'altra colonna invece di A^1.

3. $\det(C_1 + C_2|A^2|\cdots|A^n) = \det(C_1|A^2|\cdots|A^n) + \det(C_2|A^2|\cdots|A^n)$. Lo stesso se A^j (invece di A^1) è somma di due vettori.

4. Se $A^i = A^j$ e $i \neq j$, allora $\det A = 0$.

5. Se sommo ad una colonna di A un multiplo di un'altra colonna, il determinante non cambia.

6. Trasposta di una matrice.

7. $\det A = \det(A^T)$.

8. Tutte le proprietà del determinante che valgono per colonne, valgono anche per le righe.

9. Si può sviluppare il determinante secondo una riga qualsiasi. Lo sviluppo di Laplace secondo la k-esima riga è

$$\det A = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+k} a_{kh} \det A_{kh}.$$

10. Calcolo del determinante. Se una colonna (o una riga) della matrice A è nulla, allora $\det A = 0$.

11. Algoritmo per il calcolo del determinante. Se la prima colonna è nulla abbiamo finito. Altrimenti esiste un elemento non nullo nella prima colonna. Scambiando (se necessario) due righe ci riconduciamo al caso in cui $a_{11} \neq 0$. Allora per ogni $i = 2, \ldots, n$ sommo alla i-esima riga di A la prima riga moltiplicata per $-a_{i1}/a_{11}$. La matrice A' così ottenuta ha determinante uguale a quello di A ed è della forma
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & B \end{pmatrix},$$
dove $B \in M(n-1)$. Sviluppando lungo la prima riga ottengo $\det A = \det A' = a_{11} \cdot \det B$. Procedo su B nello stesso modo.

22/11, 11-13

1. Definizione di funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
2. Definizione di applicazione lineare $V \longrightarrow W$.
3. La trasposizione è una applicazione lineare
$$\begin{aligned} M_{m\times n} &\longrightarrow M_{n\times m}, \\ A &\longmapsto A^T, \end{aligned}$$
ossia $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.
4. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.
5. Date $(n-1)$-colonne $A^2, \ldots, A^n$, la funzione
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(X) := \det(X|A^2|\cdots|A^n)$$
è lineare. Lo stesso vale per altre colonne.
6. Teorema di Binet (senza dimostrazione).
7. In generale $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.
8. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
9. Se le colonne di A sono linearmente dipendenti, cioè se una delle colonne è combinazione lineare delle altre, allora $\det A = 0$.
10. Una matrice $A \in M(n)$ è invertibile se e soltanto se $\det A \neq 0$.
11. Se $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, allora $A^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$
12. Matrice cofattore. Formula di Cramer per la matrice inversa.
13. Teorema di Cramer per la risoluzione di sistemi quadrati non singolari (cioè $AX = B$ con A una matrice $n \times n$ invertibile).
14. Esempi di calcolo di determinante.

25/11, 11-13

1. Siano $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_k\}$ sia una lista linearmente indipendente e che invece $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ sia linearmente dipendente. Allora $v_{k+1} \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ e

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k).$$

   In questo caso diciamo che v_{k+1} è *superfluo*.

2. Sia $\mathscr{L}$ una lista di vettori di $\mathbb{R}^m$ e poniamo $W := \mathrm{Span}(\mathscr{L}) \subset \mathbb{R}^m$. Supponiamo che $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}$ sia una sottolista con queste due proprietà: (1) $\mathscr{L}'$ è linearmente indipendente, (2) se aggiungo a $\mathscr{L}'$ qualche altro vettore di $\mathscr{L}$, la lista ottenuta non è più linearmente indipendente. Allora $\mathscr{L}'$ è una base di W.

3. Definizione di rango: $\mathrm{rg}(A) := \dim \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$.

4. Se A è $m \times n$, $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.

5. Se $m \leq n$, allora $\mathrm{rg}\, A = m$ se e soltanto se $\{A^1, \dots, A^n\}$ è una lista di generatori di $\mathbb{R}^m$.

6. Se $m \geq n$, allora $\mathrm{rg}\, A = n$ se e soltanto se $\{A^1, \dots, A^n\}$ è una lista linearmente indipendente.

7. Se $m = n$, allora $\mathrm{rg}\, A = n$ se e soltanto se $\{A^1, \dots, A^n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

8. Se scambio due colonne di una matrice il rango non cambia.

9. Se sommo a una colonna un multiplo di un'altra colonna, il rango non cambia.

10. Se moltiplico una colonna di una matrice per un numerno diverso da 0, il rango non cambia.

11. Se $m = n$, allora $\mathrm{rg}(A) = n$ se e solo se $\det A \neq 0$ se e solo se $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

12. Sottomatrici e minori.

13. Sia $A' \subset A$ una sottomatrice quadrata $p \times p$ e sia $\det A' \neq 0$. Allora $p \leq \mathrm{rg}(A)$.

14. $\mathrm{rg}(A) = \max\{r$: esiste un minore non nullo di A di ordine $r\}$.

15. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T) = \dim \mathrm{Span}(A_1, \dots, A_m)$.

16. Le operazioni possiamo farle anche sulle righe.

29/11, 9-11.

1. Sistemi lineari compatibili.
2. Matrice completa di un sistema lineare.
3. Teorema di Rouché-Capelli: Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbb{R}^m$. Allora il sistema lineare
$$AX = B$$
è compatibile se e solo se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A})$, dove $\tilde{A} = (A|B)$. (Con dimostrazione.)
4. Due sistemi lineari sono detti equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.
5. Operazioni su un sistema lineare che lo trasformano in un sistema equivalente.
6. Sistemi lineari a scala e loro risoluzione.
7. Metodo di Gauss per ridurre un sistema lineare ad un sistema equivalente a scala.

5/12, 14-16

1. Rappresentazione parametrica delle soluzioni di un sistema lineare.
2. Conoscere una rappresentazione parametrica delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$, equivale a conoscere una base di $\ker A$.
3. I Teorema di struttura: se A è una matrice $m \times n$, le soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \mathrm{rg}\, A$. Questo sottospazio vettoriale viene chiamato nucleo di A ed è indicato con il simbolo $\ker A$.
4. Pivot. Il rango di una matrice a scale è il numero di pivot.
5. Definizione di *varietà lineare* o *traslato* o *sottospazio affine*: se $W \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale e $X_0 \in \mathbb{R}^n$, allora il simbolo $X_0 + W$ indica l'insieme formato da tutti i vettori della forma $X_0 + v$ con $v \in W$. In altre parole
$$X_0 + W := \{X \in \mathbb{R}^n : X - X_0 \in W\}.$$
L'insieme $X_0 + W$ viene chiamato *varietà lineare* o *sottospazio affine* o anche *traslato di* W. La dimensione di $X_0 + W$ è per definizione la dimensione di W.

6. II Teorema di struttura: Se il sistema $AX = B$ è compatibile, allora l'insieme S delle soluzioni è un traslato di $\ker A$. Infatti data una qualunque soluzione $X_0 \in S$ si ha

$$S = X_0 + \ker A := \{X \in \mathbb{R}^n : X - X_0 \in \ker A\}.$$

   In particolare S è un sottovarietà lineare di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \mathrm{rg}(A)$.

7. Esercizi sui sistemi lineari.

6/12, 11-13.

1. Sistemi lineari dipendenti da un parametro.

2. Applicazioni lineari fra spazi vettoriali.

3. La derivata come applicazione lineare.

4. Se $f : V \to W$ è lineare, dati $v_i \in V$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i).$$

5. Se A è una matrice $m \times n$, allora l'applicazione

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad L_A(X) := AX,$$

   è lineare e viene chiamata l'*applicazione lineare associata* alla matrice A.

6. Le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sono tutte e sole le applicazioni L_A con A una matrice $m \times n$.

7. Se $f : V \longrightarrow W$ è lineare e U è un sottospazio vettoriale di V, allora $f(U)$ è un sottospazio vettoriale di W. In particolare, $\mathrm{Im}\, f$ è un sottospazio vettoriale di W.

8. Nucleo.

9. Teorema delle dimensioni: se V ha dimensione finita, allora

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V.$$

10. Dimostrazione del teorema delle dimensioni.

11. Se $f = L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, allora $\ker L_A = \ker A$, $\mathrm{Im}\, L_A = \mathrm{Span}(A^1, \ldots, A^n)$ e $\dim \mathrm{Im}\, L_A = \mathrm{rg}(A)$. Quindi il I Teorema di Struttura discende dal teorema delle dimensioni.

12/12, 14-16

1. Metodo per trovare le equazioni cartesiane di una varietà lineare $S = X_0 + W \subset \mathbb{R}^n$ a partire dal punto X_0 e da una base del sottospazio vettoriale W. In altre parole questo metodo dà l'equazione cartesiana di una varietà lineare se ne è nota una rappresentazione parametrica.

2. Sia $L : V \to W$ una applicazione lineare e sia $\mathscr{L} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ una lista in V. Poniamo $\mathscr{L}' := \{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$.

   (a) Se $\mathscr{L}$ è una lista di generatori di V, allora $\mathscr{L}$ è una lista di generatori di $\operatorname{Im} L$.

   (b) Se $\mathscr{L}$ è una lista linearmente dipendente, anche $\mathscr{L}'$ è linearmente dipendente.

   (c) In generale, se $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente, NON è detto che $\mathscr{L}'$ sia linearmente indipendente.

3. Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (a) f è iniettiva.

   (b) $\ker f = \{0_V\}$.

   (c) Se $\mathscr{L}$ è una lista linearmente indipendente in V, allora $\mathscr{L}'$ è linearmente indipendente.

4. Una applicazione lineare e biunivoca si chiama *isomorfismo*.

5. Se V ha dimensione n e $\mathcal{B}$ è una base di V, l'applicazione data dalle coordinate

$$[\bullet]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

   è un isomorfismo.

6. Sia $L : V \longrightarrow W$ è una applicazione lineare. Se $\mathscr{L} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V ed è tale che la lista $\mathscr{L}' := \{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$ risulta una base di W, allora L è un isomorfismo.

7. Se $\dim V = \dim W$, allora una applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è un isomorfismo.

8. Se $\dim V > \dim W$, non esistono applicazioni lineari iniettive $L : V \longrightarrow W$.

9. Se $\dim V < \dim W$, non esistono applicazioni lineari suriettive $L : V \longrightarrow W$.

10. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, \ldots, w_n \in W$ dei vettori arbitrari. Allora esiste una ed una sola applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ tale che $L(v_j) = w_j$ per $j = 1, \ldots, n$.

11. *Matrice associata* ad una applicazione lineare: sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V ed una base $\mathcal{D} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ di W. La *matrice associata* ad L rispetto a queste basi è la matrice che ha come j-esima colonna il vettore

$$[L(v_j)]_{\mathcal{D}}.$$

Questa matrice viene indicata col simbolo $[L]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$. (Nel libro viene usato il simbolo $[[L]]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$.) Se $[L]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = A = (a_{ij})$, allora

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

12. Se $v \in V$ e $A = [L]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$, allora

$$[L(v)]_{\mathcal{D}} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

13/12, 11-13

1. Sia A una matrice $m \times n$. Allora L_A è iniettiva se e solo se $\mathrm{rg}(A) = n$, mentre L_A è suriettiva se e solo se $\mathrm{rg}(A) = m$.

2. Se A è una matrice $m \times n$ e $\mathscr{C}_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora

$$[L_A]_{\mathscr{C}_n \mathscr{C}_m} = A.$$

3. La composizione di applicazioni lineare è lineare.

4. Se $A \in M(m,n)$ e $B \in M(n,k)$, allora $L_A \circ L_B = L_{AB}$.

5. Supponiamo che V, W, Z siano spazi vettoriali e che $L : V \longrightarrow W$ ed $S : W \longrightarrow Z$ siano applicazioni lineari. Fissiamo basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ di V, W e Z rispettivamente. Allora

$$[S \circ L]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = [S]_{\mathcal{D},\mathcal{E}} \cdot [L]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}.$$

6. Se V è uno spazio vettoriale e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora la matrice $M := [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ viene chiamata *la matrice del cambiamento di base* da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Se $v \in V$ ha coordinate X rispetto a $\mathcal{B}$ e X' rispetto a $\mathcal{B}'$, allora

$$X = MX'.$$

7. La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è invertibile e la sua inversa è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

8. Sia $L : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V. Allora

$$[L]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [L]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} M$$

dove $M = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

9. Matrici simili. Se $A \sim B$ e $B \sim C$, allora $A \sim C$. Se $A \sim B$, allora $B \sim A$.

10. Se $L : V \to V$ è un operatore lineare e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora le matrici $[L]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ e $[L]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$ sono simili. Matrici simili rappresentano lo stesso operatore lineare rispetto a basi diverse.

11. Autovettori, autovalori, autospazi, spettro di un operatore.

12. Autovalori e autovettori di matrici diagonali.

13. Un operatore $L : V \to V$ è *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B}$ di V formata da autovettori di V. Ciò equivale a dire che la matrice associata $[L]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è diagonale. Infatti se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $[L]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, allora $L(v_j) = \lambda_j v_j$.

16/12, 11-13

1. *Base diagonalizzante.*

2. Una matrice quadrata è *diagonalizzabile* se è simile a una matrice diagonale.

3. Una matrice $A \in M(n)$ è diagonalizzabile se e solo se l'operatore $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile. Infatti se $D = M^{-1}AM$ e $\mathcal{B} = \{M^1, \dots, M^n\}$, allora D è diagonale se e solo se tutti i vettori M^j sono autovettori di L_A. Anzi $L_A(M^j) = \lambda_j M^j$ per ogni $j = 1, \dots, n$ se e solo se

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4. Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice.

5. Radici o zeri di un polinomio. Molteplicità di una radice di un polinomio. Sia $p(t)$ un polinomio. Un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice di moltiplicità k se tutte le derivate di p fino all'ordine $k-1$ incluso si annullano in λ. Per esempio una radice λ ha molteplicità 3 se la derivata 0-esima, cioè il polinomio p stesso, si annulla in λ: $p(\lambda) = 0$, e lo stesso vale per le derivate prima e seconda: $p'(\lambda) = p''(\lambda) = 0$.

6. Supponiamo di avere fattorizzato il polinomio $p(t)$, cioè di averlo scritto nella forma seguente:

$$p(t) = a(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k} q_1(t) \cdots q_s(t)$$

dove $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, i numeri λ_j sono tutti distinti e i $q_j(t)$ sono polinomi monici di grado 2 privi di radici reali. (Ogni polinomio si può fattorizzare in questo modo e la fattorizzazione è unica a meno dell'ordine). Allora le radici di $p(t)$ sono esattamente $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e la radice λ_j ha molteplicità m_j.

7. Esempio: $p(t) = t^5 - t^4 - t + 1 = (t-1)^2(t+1)(t^2+1)$.
   $f(t) = t^4 + 1 = (t^2 - \sqrt{2}t + 1)(t^2 + \sqrt{2}t + 1)$.
8. Polinomi totalmente decomponibili.
9. Polinomio caratteristico di una matrice.
10. Gli autovalori di A sono le radici di p_A.
11. Traccia di una matrice. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
12. Se A è di ordine n, allora
$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \cdot t^{n-1} + \cdots + \det A.$$
13. Se $A \sim B$, allora
    (a) $\det A = \det B$,
    (b) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$,
    (c) $p_A = P_B$,
    (d) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.
14. Il viceversa è FALSO: se ho due matrici A e B e so che le condizioni (a)-(d) qui sopra sono vere, NON è detto che A e B siano simili.

19/12, 14-16.

1. Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e $V' \subset V$ è un sottospazio, allora $\dim f(V') = \dim V'$.
2. Se $M \in \mathrm{GL}(n)$, allora $L_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo.
3. Se $A = MBM^{-1}$, allora $\operatorname{Im} L_A = L_M(\operatorname{Im} L_B)$, quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.
4. Siano A e B due matrici $n \times n$. Se $p_A = p_B$ allora $\det A = \det B$ e $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.
5. Se $A \sim B$, allora $A^2 \sim B^2$.
6. Se $A \sim 0$, allora $A = 0$ (0 indica la matrice nulla $n \times n$).
7. Esempio di matrici non simili.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   soddisfano $p_A(t) = p_B(t) = t^4$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$, ma non sono simili. Infatti se $A \sim B$, allora $A^2 \sim B^2$. Invece $A^2 = 0$ e $B^2 \neq 0$. Dunque A^2 e B^2 non possono essere simili. Ma allora neanche A e B sono simili.

8. Siano V_1 e V_2 sottospazi di uno spazio vettoriale W. Allora V_1 e V_2 sono in somma diretta se e solo se $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ se e solo se date basi $\mathcal{B}_i$ di V_i per $i = 1, 2$, si ha che $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è una base di $V_1 + V_2$.

9. Prendiamo la prima condizione come definizione di somma diretta per più di due spazi: siano $V_1, \ldots, V_k$ sottospazi di uno spazio vettoriale W; diciamo che essi sono in somma diretta se $\dim(V_1 + \cdots + V_k) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_k$. Questa condizione è equivalente al fatto che date basi $\mathcal{B}_i$ di V_i per $i = 1, \ldots, k$, la lista $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ è una base di $V_1 + \cdots + V_k$.

10. Se $\mathrm{Spett}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, allora gli autospazi $V_{\lambda_1}(A), \ldots, V_{\lambda_k}(A)$ sono in somma diretta. (Dimostrazione nel caso $k = 2$.)

11. Molteplicità geometrica di un autovalore λ: $m(\lambda)$.

12. I Criterio di diagonalizzabilità: se A è una matrice $n \times n$ e lo spettro di A è $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, allora A è diagonalizzabile se e soltanto se $\sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i) = n$.

13. Molteplicità algebrica di un autovalore λ: $\mu(\lambda)$.

14. Disuguaglianza fondamentale: $1 \leq m(\lambda) \leq \mu(\lambda)$ (senza dimostrazione).

15. Un autovalore λ è *regolare* se $m(\lambda) = \mu(\lambda)$.

16. Un autovalore λ è *semplice* se $\mu(\lambda) = 1$. Un autovalore semplice è automaticamente regolare.

17. II Criterio di diagonalizzabilità: A è diagonalizzabile se e soltanto se il polinomio caratteristico di A è totalmente decomponibile e ogni autovalore è regolare.

18. Se A ha ordine n e ha n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile.

19. Se A è diagonalizzabile e i suoi autovalori (ripetuti secondo la molteplicità) sono $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, allora $\det A = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ e $\mathrm{tr}(A) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

20/12, 11-13

1. Data una matrice $A \in M_n$ vogliamo stabilire se è diagonalizzabile e in caso positivo vogliamo diagonalizzarla, cioè vogliamo trovare una base diagonalizzante.

   (a) Per prima cosa calcoliamo il polinomio caratteristico $p_A(t)$. Se questo non è totalmente decomponibile, allora A non è diagonalizzabile e abbiamo finito.

   (b) Se invece è totalmente decomponibile, indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ le sue radici. Dunque $\mathrm{Spett}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Per ogni i l'autospazio relativo a λ_i è $V_{\lambda_i}(A) = \ker(A - \lambda_i I)$. Quindi $m(\lambda_i) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i I)$. Se c'è un autovalore λ_i tale che $m(\lambda_i) \neq \mu(\lambda_i)$ (cioè λ_i non è regolare), allora A non è diagonalizzabile e abbiamo finito.

(c) Se invece ogni autovalore è regolare, cioè se $m(\lambda_i) = \mu(\lambda_i)$ per ogni i, allora A è diagonalizzabile (II criterio). In questo caso procediamo risolvendo il sistema omogeneo $(A - \lambda_i I) \cdot X = \underline{0}$. In questo modo troviamo una base $\mathscr{B}_i$ di $V_{\lambda_i}(A)$. La lista $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ è la base diagonalizzante.

(d) Sia D la matrice diagonale che ha come elementi sulla diagonale $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, ciascuno ripetuto secondo la molteplicità. Sia M la matrice che ha come colonne i vettori di $\mathscr{B}$. Allora A è la matrice associata ad L_A nella base canonica e D è la matrice associata ad L_A nella base $\mathscr{B}$, mentre M è la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ alla base canonica. Quindi

$$A = MDM^{-1}.$$

2. Esercizi sulla diagonalizzabilità.

9/1, 14-16

1. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.
2. $\langle x, y\rangle = x^T \cdot y$ (prodotto di matrici).
3. È bilineare, simmetrico e definito positivo.
4. Norma. Omogeneità della norma: $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.
5. Siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri reali e supponiamo $a_i \geq 0$ per ogni i. Se $a_1 + \cdots + a_n = 0$, allora $a_i = 0$ per ogni i.
6. Nozione di angolo fra due vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$.
7. x e y sono perpendicolari (o ortogonali) se almeno uno è nullo oppure se sono entrambi non nulli e hanno angolo $\pi/2$.
8. x e y sono perpendicolari se e solo se $\langle x, y\rangle = 0$.
9. Il vettore nullo è ortogonale ad ogni vettore ed è l'unico vettore con questa proprietà.
10. Teorema di Pitagora generalizzato: se $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $x \perp y$, allora $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.
11. Sistemi e basi ortogonali e ortonormali.
12. Coefficienti di Fourier di un vettore rispetto a un sistema ortogonale.
13. Se $\mathcal{B}$ è una base ortogonale, i coefficienti di Fourier di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ coincidono con le coordinate di x rispetto alla base $\mathcal{B}$.
14. Se $\mathcal{L} = \{v_1, \ldots, v_h\}$ è un sistema ortogonale, allora $\mathcal{L}$ è linearmente indipendente.

15. Dato un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$ poniamo

$$V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v \rangle = 0 \text{ per ogni } v \in V\}.$$

$V^\perp$ si chiama *complemento ortogonale* di V.

16. $V^\perp$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e $V \cap V^\perp = \{0\}$.

17. Se $\mathscr{L} = \{v_1, \ldots, v_h\}$ è una base di V, allora

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v_j \rangle = 0 \text{ per ogni } j = 1, \ldots, h\}.$$

18. Allora dato $x \in \mathbb{R}^n$, esistono $x' \in V$ e $x'' \in V^\perp$ tali che

$$x = x' + x''.$$

Inoltre x' e x'' sono unici. Chiamiamo x' *proiezione ortogonale* di x su V. Se $\mathscr{L} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ è una qualsiasi base ortogonale di V, allora

$$x' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle x, u_i \rangle}{||u_i||^2} u_i.$$

In particolare $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ e $\dim V^\perp = n - \dim V$.

19. Algoritmo di Gram-Schmidt.

20. Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette una base ortonormale.

10/1, 11-13

1. $(V^\perp)^\perp = V$. Infatti si verifica immediatamente che $V \subset (V^\perp)^\perp$. Siccome i due spazi hanno la stessa dimensione, coincidono.

2. Esercizi su Gram-Schmidt.

3. Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio e sia A una matrice $m \times n$ tale che $V = \ker A$ e $\operatorname{rg}(A) = m$. Allora i vettori $(A_1)^T, \ldots, (A_m)^T$ formano una base di $V^\perp$.

4. Matrici ortogonali: $A^T \cdot A = I_n$.

5. È equivalente a dire che $A \in \mathrm{GL}(n)$ e $A^T = A^{-1}$.

6. L'insieme di tutte le matrici ortogonali si indica con $\mathrm{O}(n)$.

7. Se A è ortogonale, allora $A \cdot A^T = I_n$.

8. Se $A, B \in \mathrm{O}(n)$, allora $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ e $AB \in \mathrm{O}(n)$.

9. Se $A \in \mathrm{O}(n)$, allora $\det A = \pm 1$.

10. Se A, B sono matrici $n \times n$, allora $(AB)_{ij} = \langle A_i^T, B^j >$.

11. Una matrice $A \in M_n$ è ortogonale se e solo se le colonne di A formano una base ortonormale: $\langle A^i, A^j \rangle = (A^i)^T \cdot A^j = (A^T \cdot A)_{ij}$.

12. Una matrice $A \in M_n$ è ortogonale se e solo se le trasposte delle righe di A formano una base ortonormale.

13. Se $A \in M(n)$, e $X, Y \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^T Y \rangle.$$

14. Delta di Kronecker δ_{ij}.

15. Sia A una matrice $n \times n$. Allora $A \in \mathrm{O}(n)$ sse per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle. \tag{3}$$

Dimostrazione. Se $A \in \mathrm{O}(n)$, allora

$$\langle AX, AY \rangle = \langle X, A^T AY \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Viceversa supponiamo che (3) valga per ogni $X.Y \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$0 = \langle AX, AY \rangle - \langle X, Y \rangle = \langle X, (A^T A - I)Y \rangle.$$

Dunque il vettore $(A^T A - I)Y$ è ortogonale ad ogni vettore di $\mathbb{R}^n$. Quindi $(A^T A - I)Y = 0$. Ma allora $\ker(A^T A - I) = \mathbb{R}^n$, per cui $A^T A - I$ è la matrice nulla e dunque $A \in \mathrm{O}(n)$. □

16. Matrici ortogonali 2×2. Sia $A \in \mathrm{O}(2)$. Se $\det A = 1$, allora

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

In questo caso A rappresenta la rotazione di angolo θ in senso antiorario. Se invece $\det A = -1$, allora

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

In questo caso A rappresenta la riflessione rispetto alla retta s passante per l'origine e per il punto $(\cos(\theta/2), \operatorname{sen}(\theta/2))$.

13/1, 9-13

1. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale e sia A una matrice A $n \times n$. Allora A è ortogonale se e solo se la base $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ è ancora ortonormale.

Dimostrazione. Se $A \in \mathrm{O}(n)$, allora $\langle Av_i, Av_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, dunque $\{Av_i\}$ è una base o.n. Viceversa supponiamo che $\{Av_i\}$ sia una base ortonormale. Allora $\forall i \forall j$

$$0 = \langle Av_i, Av_j \rangle - \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_i, A^T Av_j \rangle - \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle =$$
$$= \langle v_i, A^T Av_j - v_j \rangle = \langle v_i, (A^T A - I)v_j \rangle.$$

Dunque il vettore $(A^T A - I)v_j$ è ortogonale a tutto $\mathbb{R}^n$. Pertanto $(A^T A - I)v_j = 0$. Ma questo vale per ogni j, quindi $A^T A - I$ è la matrice nulla, ossia $A^T A = I$. □

2. Forme quadratiche e corrispondenza con le matrici simmetriche.

3. Segno di una forma quadratica.

4. Segno di una forma quadratica diagonale.

5. Teorema spettrale: se $A \in M_n$ è simmetrica, allora
   (a) A è diagonalizzabile (senza dimostrazione);
   (b) gli autospazi di A sono a due a due ortogonali;
   (c) esiste una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A;
   (d) esiste una matrice *ortogonale* M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

6. Sia f una forma quadratica in n variabili e sia A la matrice simmetrica associata. Per il teorema spettrale esistono una matrice $M \in \mathrm{O}(n)$ ed una matrice diagonale D tali che $A = MDM^{-1}$. M e D si trovano in questo modo:
   (a) Si determinano gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ di A.
   (b) Per ogni autospazio $V_{\lambda_i}(A)$ si trova una base *ortonormale* $\mathscr{B}_i$. Pongo $\mathscr{B} := \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_k$. Allora M è la matrice che ha come colonne i vettori della base $\mathscr{B}$.
   (c) Invece D è la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di A ciascuno ripetuto secondo la propria molteplicità.

7. Una volta che abbiamo trovato $\mathscr{B}$, M e D, poniamo $Y = [X]_{\mathscr{B}}$. Allora si ha
   $$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$
   Questa è la *forma canonica* di f.

8. Determinazione del segno della forma quadratica f a partire dagli autovalori di A.

9. Criterio di Sylvester o dei minori incapsulati.

10. Il caso di una forma quadratica in 2 variabili.

11. Esercizi sulle forme quadratiche.