Calendario del corso di Geometria e Algebra
anno accademico 2016/2017

10 gennaio 2017

26/09, 11-13 aula EF4.

1. Insieme. Elementi di un insieme.
2. Sottoinsiemi di un insieme: $A \subset B$.
   Uguaglianza di insiemi.
3. $A = B$ se e soltanto se $A \subset B$ e $B \subset A$.
4. Insiemi numerici: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
5. Intersezione e unione di insiemi.
6. Prodotto cartesiano. Coppie: (a, b). Due coppie (a, b) e (a', b') sono uguali se e soltanto se $a = a'$ e $b = b'$.

28/09, 11-13.

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Complementare: $A - B$.
3. $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$.
4. $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$.
5. Funzioni. Dominio, codominio.
6. Se $f : X \to Y$ e $x \in X$, l'elemento che f associa ad x si chiama immagine di x mediante f e si indica con $f(x)$.
7. Funzioni iniettive e funzioni suriettive.
8. Funzioni biunivoche. Funzione inversa.
9. Composizioni di funzioni.
10. Funzione identità id_X.

29/09, 11-13.

1. Esempi di funzioni, di funzioni iniettive e di funzioni suriettive.
2. Controimmagine di un sottoinsieme del codominio: se $f : X \to Y$ è una funzione e $B \subset Y$, allora la controimmagine di B mediante f è il sottoinsieme
$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}.$$
3. Se B è il sottoinsieme formato dal solo elemento y_0, si scrive $f^{-1}(y_0)$ anziché $f^{-1}(\{y_0\})$.
4. Quando $f : X \to Y$ è biunivoca, allora è definita la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ e il sottoinsieme $f^{-1}(y_0)$ (cioè la controimmagine del sottoinsieme $\{y_0\} \subset Y$) contiene solamente l'elemento $f^{-1}(y_0)$.
5. $f : X \to Y$ è suriettiva se e soltanto se per ogni $y \in Y$ la controimmagine $f^{-1}(y)$ contiene almeno un elemento.
6. $f : X \to Y$ è iniettiva se e soltanto se per ogni $y \in Y$ la controimmagine $f^{-1}(y)$ contiene al più un elemento.
7. $f : X \to Y$ è biunivoca se e soltanto se per ogni $y \in Y$ la controimmagine $f^{-1}(y)$ contiene esattamente un elemento. Questo elemento è $f^{-1}(y)$, cioè la funzione inversa applicata a y.
8. Simboli $\forall$, $\exists$, $\exists!$.
9. Negazione di proposizioni contenenti questi simboli.
10. Proprietà della somma e del prodotto di numeri reali.
11. Vettori applicati nel piano.
12. Somma di vettori applicati e sue proprietà.
13. Prodotto di un vettore applicato per uno scalare. Proprietà del prodotto per uno scalare.
14. L'insieme dei vettori applicati nel piano con origine O si indica con $\mathbb{E}^2_O$.
15. Se P è un punto del piano, il simbolo $\overrightarrow{OP}$ indica il vettore applicato in O che ha come punto finale P.
16. Se $\vec{v} \in \mathbb{E}^2_O$, il simbolo $O + \vec{v}$ indica punto finale di $\vec{v}$.

03/10, 11-13.

1. Vettori applicati nello spazio.
2. Somma e prodotto per uno scalare in $\mathbb{E}^3_O$ e loro proprietà.
3. Definizione di $\mathrm{Span}(\vec{u})$.
4. $\mathrm{Span}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$.
5. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, allora l'insieme $\{P \in \mathcal{E} : P = O + \vec{v}, \text{ con } \vec{v} \in \mathrm{Span}(\vec{u})\}$ coincide con la retta passante per l'origine avente direzione uguale a quella di $\vec{u}$.
6. Definizione di $\mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v})$.
7. La lista di vettori $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ è detta <u>linearmente indipendente</u> se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \notin \mathrm{Span}(\vec{u})$.
8. $\mathrm{Span}(\vec{0}, \vec{0}) = \{\vec{0}\}$.
9. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \in \mathrm{Span}(\vec{u})$, allora $\mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Span}(\vec{u})$.
10. Se la lista $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ è linearmente indipendente, allora l'insieme $\{P + \vec{w} : \vec{w} \in \mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v})\}$ coincide con il piano passante per l'origine e contenente i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
11. Definizione di $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$. Combinazioni lineari.
12. La lista $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è <u>linearmente indipendente</u> se $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 \notin \mathrm{Span}(\vec{v}_1)$ e $\vec{v}_3 \notin \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.
13. $\mathrm{Span}(\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}) = \{\vec{0}\}$.
14. Se $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ e $\vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathrm{Span}(\vec{v}_1)$, allora $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \mathrm{Span}(\vec{v}_1)$.
15. Se la lista $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ è linearmente indipendente e $\vec{v}_3 \in \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, allora $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.
16. Se la lista $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è linearmente indipendente, allora l'insieme $\{P + \vec{w} : \vec{w} \in \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\}$ coincide con tutto $\mathbb{E}^3_O$.

05/10: 11-13.

1. Basi di $\mathbb{E}^3_O$. Basi ortonormali.
2. Coordinate di un vettore rispetto ad una base.
3. Riferimenti e riferimenti ortonormali nello spazio euclideo.
4. Coordinate di un punto dello spazio rispetto ad un riferimento.

5. Operazioni su $\mathbb{R}^3$: somma di due elementi di $\mathbb{R}^3$ e prodotto di uno scalare per un elemento di $\mathbb{R}^3$.
6. Le coordinate di $\vec{v} + \vec{w}$ sono la somma delle coordinate di $\vec{v}$ e delle coordinate di $\vec{w}$.
7. Le coordinate di $\lambda \cdot \vec{v}$ sono le coordinate di $\vec{v}$ moltiplicate per λ.
8. Equazione parametrica vettoriale della retta.
9. Equazione parametrica della retta in coordinate.

06/10, 11-13.

1. Somma di un punto $P \in \mathcal{E}$ e di un vettore $\vec{v} \in \mathbb{E}^3_O$.
2. Vettore $\overrightarrow{AB}$. $A + \overrightarrow{AB} = B$. $\overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{OP}$.
3. Sia fissato un riferimento $O\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_3$. Se A è il punto di coordinate $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ e B è punto di coordinate $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, allora $\overrightarrow{AB}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.
4. Traslazione $\tau_{\vec{v}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ di vettore $\vec{v} \in \mathbb{E}^3_O$.
5. Se r è la retta $P = P_0 + t\vec{v}$, allora un punto Q giace su r se e soltanto se $\overrightarrow{P_0Q}$ è parallelo al vettore $\vec{v}$.
6. Equazione parametrica della retta per 2 punti distinti.
7. Siano

$$r : P = P_0 + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}, \qquad r' := Q_0 + s\vec{w},\ s \in \mathbb{R}$$

   le equazioni parametriche di due rette. Le due rette coincidono se e solo se i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono l'uno multiplo dell'altro e $\overrightarrow{P_0Q_0}$ un multiplo di essi, cioè se e solo se $\overrightarrow{P_0Q_0} \parallel \vec{v} \parallel \vec{w}$. Le due rette sono parallele (e distinte) se e solo se i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono l'uno multiplo dell'altro, ma $\overrightarrow{P_0Q_0}$ non è parallelo ad essi.
8. Equazione parametrica vettoriale del piano.
9. Equazione parametrica in coordinate del piano.
10. Equazione parametrica del piano per 3 punti non allineati.

10/10, 11-13.

1. Proiezione ortogonale di un vettore $\vec{v}$ su un altro vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$. La proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ si indica con $\vec{v}^{\|}$.

2. Se θ è l'angolo fra $\vec{u}$ e $\vec{v}$, allora
$$\vec{v}^{\|} = \frac{||\vec{v}|| \cos\theta}{||\vec{u}||}.$$

3. Proiezione ortogonale di un vettore $\vec{v}$ su un piano passante per l'origine. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, la proiezione ortogonale di $\vec{v}$ sul piano perpendicolre a $\vec{u}$ si indica con $\vec{v}^{\perp}$.

4. $\vec{v}^{\|} + \vec{v}^{\perp} = \vec{v}$. Inoltre se $\vec{w}_1 \in \mathrm{Span}(\vec{u})$ e $\vec{w}_2 \perp \vec{u}$ sono due vettori tali che $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{v}$, allora $\vec{w}_1 = \vec{v}^{\|}$ e $\vec{w}_2 = \vec{v}^{\perp}$.

5. Linearità delle proiezioni:
$$(\vec{v} + \vec{w})^{\|} = \vec{v}^{\|} + \vec{w}^{\|},$$
$$(\lambda \cdot \vec{v})^{\|} = \lambda \cdot (\vec{v}^{\|}),$$
$$(\vec{v} + \vec{w})^{\perp} = \vec{v}^{\perp} + \vec{w}^{\perp},$$
$$(\lambda \cdot \vec{v})^{\perp} = \lambda \cdot (\vec{v}^{\perp}).$$

6. Definizione del prodotto scalare.

7. Proiezioni ortogonali in termini del prodotto scalare.

8. Proprietà del prodotto scalare: simmetria, omogeneità, distributività.

9. Fissato un riferimento cartestiano ortonormale $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, come calcolare in coordinate prodotti scalari, lunghezze, angoli e distanze.

12/10, 11-13.

1. Equazione cartesiana del piano.

2. Condizioni sotto le quali due equazioni determinano lo stesso piano.

3. Passaggio dalla equazione cartesiana del piano all'equazione parametrica e viceversa.

4. Due piani sono paralleli se e soltanto se i vettori normali sono proporzionali.

5. Equazioni cartesiane della retta. Passaggio dalle equazioni cartesiane alla rappresentazione parametrica e viceversa.

13/10, 11-13.

1. Posizioni reciproche di due rette (incidenti, sghembe, parallele).
2. Posizione reciproche di una retta ed un piano.
3. Distanza punto-piano e punto-retta.
4. Esercizi di geometria analitica.

17/10

- Definizione di spazio vettoriale astratto.
- Esempi: $\mathbb{E}^3_O$, $\mathbb{R}^n$, V =l'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.
- Conseguenze degli assiomi di spazio vettoriale:
  - legge di cancellazione;
  - $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$;
  - $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$;
  - $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$;
  - se $\lambda \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, allora $\lambda \cdot \vec{v} \neq \vec{0}$;
  - se $\vec{v} \neq \vec{0}$, allora da $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ segue $\alpha = \beta$.
- Definizione di *sottospazio vettoriale* di uno spazio vettoriale astratto.
- I sottospazi vettoriali di $\mathbb{E}^3_O$ sono i seguenti: $\{\vec{0}\}$, gli insiemi della forma $W = \{\vec{OP} : P \in r\}$ dove r è una retta per l'origine, gli insiemi della forma $W = \{\vec{OP} : P \in \pi\}$ dove π è un piano per l'origine, e infine tutto $\mathbb{E}^3_O$.
- Un sottospazio vettoriale contiene sempre il vettore nullo.

19/10

1. Notazione di sommatoria: $\sum_{i=1}^{n} a_i$.
2. Equazioni lineari omogenee in n incognite.
3. L'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Se l'equazione non è banale (cioè non tutti i coefficienti sono nulli), questo insieme viene chiamato *iperpiano*.
4. Intersezione e somma di sottospazi vettoriali di uno spazio vettorial V.
5. $W_1 \subset W_1 + W_2$. (Idem per W_2.)
6. In generale l'unione di due sottospazi vettoriali di V non è un sottospazio vettoriale.

7. Dati tre sottospazi W_1, W_2 e W_3 di uno spazio vettoriale V si ha $(W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3) \subset (W_1 + W_2) \cap W_3$. In generale $(W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3) \neq (W_1 + W_2) \cap W_3$.

8. L'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9. Combinazioni lineari.

20/10

1. Il sottospazio generato da n vettori. $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$.

2. Generatori di uno spazio vettoriale.

3. Spazi vettoriali finitamente generati.

4. $\mathbb{R}^n$ è finitamente generato.

5. Se $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi, $\deg\big(p(x) + q(x)\big) \geq \max\big(\deg p(x), \deg q(x)\big)$.

6. $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato.

24/10

1. Liste di vettori linearmente indipendenti.

2. Se $\mathscr{L} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una lista linearmente indipendente e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ sono tali che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$, allora $\lambda = \mu$.

3. La lista $\mathscr{L} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è linearmente indipendente se e soltanto se vale la proprietà seguente: se $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, allora $\lambda = \underline{0}$.

4. Sia $\mathscr{L} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Allora la lista $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente se e soltanto se valgono le proprietà seguenti:

$$\begin{cases} v_1 \neq 0, \\ v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1), \\ v_3 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2), \\ \cdots \\ v_n \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}). \end{cases}$$

5. Se $\mathscr{L} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una lista linearmente indipendente, allora $v_i \neq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

6. Basi di uno spazio vettoriale.

26/10

1. Base canonica di $\mathbb{R}^n$.
2. Se $V \subset \mathbb{R}^3$ è un piano passante per l'origine e $v = tv_1 + sv_2$, $t, s \in \mathbb{R}$ è una rappresentazione parametrica di V, allora $\{v_1, v_2\}$ è una base di V.
3. Coordinate di un vettore rispetto ad una base: se $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base e $v \in V$, allora le coordinate di v sono i numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che
$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$
Il vettore formato dalle coordinate viene indicato con
$$[v]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$
4. Se $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora $[x]_{\mathcal{C}} = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
5. $[u + w]_{\mathscr{B}} = [u]_{\mathscr{B}} + [w]_{\mathscr{B}}$, $[\lambda u]_{\mathscr{B}} = \lambda \cdot [u]_{\mathscr{B}}$.
6. Algoritmo di estrazione.
7. Se V è uno spazio vettoriale $V \neq \{0\}$ e $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$, allora è possibile estrarre da $\mathscr{L} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
8. Se $\mathscr{L}$ è una lista di generatori e $\mathscr{L}'$ è una lista contenente $\mathscr{L}$, anche $\mathscr{L}'$ è una lista di generatori.
9. Se $\mathscr{L}$ è una lista linearmente indipendente e $\mathscr{L}'$ è una lista contenuta in $\mathscr{L}$, anche $\mathscr{L}'$ è una linearmente indipendente.
10. Se aggiungo o tolgo vettori ad una base, la lista che ottengo non è più una base.
11. Sia $\mathscr{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $v \in V$. Se $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ e $\lambda_j \neq 0$, allora la lista ottenuta da $\mathscr{B}$ scambiando u_j con v è ancora una base di V.

27/10

1. Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V e $\mathscr{L} = \{z_1, \dots, z_k\}$ è una lista di vettori linearmente indipendente, allora posso sostituire i vettori $\{z_1, \dots, z_k\}$ a k opportuni vettori di $\mathcal{B}$ in modo che la nuova lista di vettori sia una base di V. Pertanto $k \leq n$.
2. Teorema della base: se V è uno spazio vettoriale finitamente generato e $V \neq \{0\}$, allora tutte le basi di V contengono lo stesso numero di elementi.

3. Definizione di dimensione.

4. Teorema di completamento: se V è uno spazio vettoriale finitamente generato e $\mathscr{L}$ è una lista linearmente indipendente, allora è possibile aggiungere ad $\mathscr{L}$ un certo numero di vettori, in modo da ottenere una base di V.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathscr{L}$ è una lista di vettori di V.

   a) Se $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente, allora $|\mathscr{L}| \leq n$ (il simbolo $|\mathscr{L}|$ indica il numero di elementi che appartanegono ad $\mathscr{L}$).
   b) Se $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente e $|\mathscr{L}| = n$, allora $\mathscr{L}$ è una base di V.
   c) Se $\mathscr{L}$ è un sistema di generatori di V, allora $|\mathscr{L}| \geq n$.
   d) Se $\mathscr{L}$ è un sistema di generatori di V e $|\mathscr{L}| = n$, allora $\mathscr{L}$ è una base di V.

6. Se W è un sottospazio di V e V ha dimensione n, allora W è finititamente generato e $\dim W \leq n$. Se $\dim W = n$, allora $W = V$.

7. Formula di Grassmann.

8. Se W, Z sono sottospazi di V, allora $\dim W \cap Z \geq \dim W + \dim Z - \dim V$.

9. Se W, Z sono sottospazi di V, e $\dim W + \dim Z > \dim V$, allora $W \cap Z \neq \{\underline{0}\}$.

10. Se W, Z sono sottospazi di V, diciamo che W e Z sono *in somma diretta* se $W \cap Z = \{\underline{0}\}$. In tal caso scriviamo $W \oplus Z$, anziché $W + Z$.

2/11

1. Calcolo di una base di $U + W$ e di $U \cap W$ a partire da basi di U e di W.

2. Sottospazio complementare.

3. Somma diretta di più di due sottospazi.

4. Matrici $m \times n$, colonne A^j, righe A_i, elementi di posto (i, j), $A = (a_{ij})$.

5. Somma di matrici. Prodotto di uno scalare per una matrice. $M(m, n)$ è uno spazio vettoriale. $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ è una base. $\dim M(m, n) = mn$.

6. Se
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$
definisco
$$A \cdot X := x_1 A^1 + \cdots x_n A^n.$$

7. Se A è $m \times n$ e B è $n \times k$ definisco
$$A \cdot B := (AB^1|\cdots|AB^n).$$
8. Siano $A \in M(m,n)$ e $B \in M(n,k)$ e sia $C = A \cdot B$. Allora
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = A_iB^j.$$
Per questo motivo si chiama prodotto righe per colonne.

3/11

1. Siano $A, B \in M(m,n)$ e $C \in M(n,k)$. Allora $(A+B)C = AC + BC$.
2. Siano $A \in M(m,n)$ e $B, C \in M(n,k)$. $A(B+C) = AB + AC$.
3. Siano $A \in M(m,n)$, $B \in M(n,k)$ e $C \in M(k,p)$. Allora $(AB)C = A(BC)$.
4. In generale $AB \neq BA$.
5. $Ae_j = A^j$.
6. Matrice identica I_n.
7. Potenze di una matrice quadrata.
8. Matrici invertibili. $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$.
9. Se $A \in M(n)$ le seguenti condizioni sono equivalenti:
   - A è invertibile.
   - Per ogni $B \in \mathbb{R}^n$ l'equazione vettoriale $AX = B$ ha una ed una sola soluzione.
   - L'equazione vettoriale $AX = B$ ha una unica soluzione, cioè il vettore nullo.
   - Le colonne di A formano una base.

7/11

1. Calcolo dell'inversa di A: sia $\mathcal{B} = \{A^1, \ldots, A^n\}$. Allora la j-esima colonna di A^{-1} è $[e_j]_{\mathcal{B}}$ dove e_j è il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.
2. Trasposizione di vettori riga e di vettori colonna. Trasposizione di matrici.
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$.
4. La colonna j-esima della trasposta è la trasposta della riga j-esima: $(A^T)^j = (A_j)^T$.

5. La riga i-esima della trasposta è la trasposta della colonna i-esima: $(A^T)_i = (A^i)^T$.

6. Se X è una matrice $1 \times n$ e Y è una matrice $n \times 1$, allora

$$XY = (Y^T) \cdot (X^T) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

7. Se $A \in M(m,n)$ e $B \in M(n,k)$, allora $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

8. Matrici simmetriche. Formano un sottospazio di $M(n)$.

9. Determinante di una matrice 2×2. Se $A \in M(2)$, allora $A \in \mathrm{Gl}(2)$ se e soltanto se $\det A \neq 0$.

10. Determinante di una matrice 3×3.

11. Formula generale per il determinante di una matrice $n \times n$ sviluppando lungo la prima colonna.

9/11

1. Se $A, B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, e allora $AB \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Inoltre $A^{-1} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $(A^{-1})^{-1} = A$ e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Se $AB \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, allora anche $A, B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

3. Teorema di Laplace: si può sviluppare il determinante secondo una colonna qualsiasi o secondo una riga qualsiasi. Lo sviluppo di Laplace secondo la j-esima colonna è

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Lo sviluppo di Laplace secondo la k-esima riga è

$$\det A = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+k} a_{kh} \det A_{kh}.$$

4. Matrici triangolari superiori e inferiori. Il loro determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

5. $\det I_n = 1$.

6. Proprietà del determinante:

   (a) Scambiando due colonne il determinante cambia di segno: per esempio se $A = (A^1 | A^2 | A^3 | \cdots | A^n) \in M(n)$,

   $$\det(A^2 | A^1 | A^3 | \cdots | A^n) = -\det A.$$

(b) $\det(\lambda A^1|A^2|\cdots|A^n) = \lambda \cdot \det A$.

(c) $\det(C_1 + C_2|A^2|\cdots|A^n) = \det(C_1|A^2|\cdots|A^n) + \det(C_2|A^2|\cdots|A^n)$.

(d) Se $A^j = 0$, allora $\det A = 0$.

(e) Se $A^i = A^j$ e $i \neq j$, allora $\det A = 0$.

(f) Se $A^i = \lambda A^j$ e $i \neq j$, allora $\det A = 0$.

10/11

1. Calcolo del determinante. Se una colonna (o una riga) della matrice A è nulla, allora $\det A = 0$.

2. Algoritmo per il calcolo del determinante. Se la prima colonna è nulla abbiamo finito. Altrimenti esiste un elemento non nullo nella prima colonna. Supponiamo per semplicità che sia a_{11}. Allora per ogni $i = 2, \ldots, n$ sommo alla i-esima riga di A la prima riga moltiplicata per $-a_{i1}/a_{11}$. La matrice A' così ottenuta ha determinante uguale a quello di A ed è della forma
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & B \end{pmatrix},$$
dove $B \in M(n-1)$. Sviluppando lungo la prima riga ottengo $\det A = \det A' = a_{11} \cdot \det B$. Procedo su B nello stesso modo.

3. Teorema di Binet (senza dimostrazione).

4. In generale $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

5. Se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $B \in M(n)$, allora le matrici B e ABA^{-1} sono dette coniugate.

6. Matrici coniugate hanno lo stesso determinante.

7. Una matrice $n \times n$ A è invertibile se e soltanto se $\det A \neq 0$.

8. Se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, allora $A^{-1} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

9. Teorema di Cramer (senza dimostrazione).

10. Se le colonne di A sono linearmente dipendenti, allora $\det A = 0$.

11. Definizione di rango.

12. Se A è $m \times n$, $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.

13. Se $m \leq n$, allora $\mathrm{rg}\, A = m$ se e soltanto se $\{A^1, \ldots, A^n\}$ è una lista di generatori di $\mathbb{R}^m$.

14. Se $m \geq n$, allora $\operatorname{rg} A = n$ se e soltanto se $\{A^1, \ldots, A^n\}$ è una lista linearmente indipendente.

15. Se $m = n$, allora $\operatorname{rg} A = n$ se e soltanto se $\{A^1, \ldots, A^n\}$ è unabase di $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$.

16/11

1. Determinante di matrici a blocchi:

$$\text{Se} \quad A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E & C \end{pmatrix},$$

   allora $\det A = \det B \cdot \det C$.

2. Se $A \in M(n)$, allora $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det A$.

3. Se le colonne di una matrice quadrata A sono linearmente indipendenti, allora anche le righe lo sono e viceversa.

4. Se $A \in \mathrm{Gl}(n)$, allora anche $A^T \in \mathrm{Gl}(n)$ e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

5. Se scambio due colonne di una matrice il rango non cambia.

6. Se sommo a una colonna un multiplo di un'altra colonna, il rango non cambia.

7. Se moltiplico una colonna di una matrice per un numerno diverso da 0, il rango non cambia.

8. Se $m = n$, allora $\operatorname{rg}(A) = n$ se e solo se $\det A \neq 0$ se e solo se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

9. Sottomatrici e minori.

10. Sia $A' \subset A$ una sottomatrice quadrata $p \times p$ e sia $\det A' \neq 0$. Allora $p \leq \operatorname{rg}(A)$.

11. Se $r = \operatorname{rg}(A)$, allora esiste un minore non nullo di A di ordine r.

12. Riassumendo vale il seguente teorema: $\operatorname{rango}(A) = \max\{r \in \mathbb{Z} :$ esiste un minore non nullo di A di ordine $r\}$.

13. $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A^T) = \dim \operatorname{Span}(A_1, \ldots, A_m)$.

14. Rango di una matrice dipendente da un parametro.

17/11

1. Siano $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ vettori di $\mathbb{R}^m$. Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_k\}$ sia una lista linearmente indipendente e che $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ sia una lista linearmente dipendente. Allora $v_{k+1} \in \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k)$ e
$$\operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k).$$
2. Sia A una matrice $m \times n$. Supponiamo di avere trovato k colonne di A che formano una lista linearmente indipendente. Chiamiamo $\mathscr{L}$ questa lista. Supponiamo poi che aggiungendo ad $\mathscr{L}$ una qualunque delle rimanenti colonne di A, si ottenga sempre una lista linearmente dipendente. Allora $\mathscr{L}$ è una base di $\operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n)$, dunque $\operatorname{rg}(A) = k$.
3. La stessa proprietà vale per le righe di A.
4. Sistemi lineari e loro scrittura matriciale. Matrice dei coefficienti. Vettore dei termini noti. Vettore delle incognite. Insieme delle soluzioni. Sistemi compatibili. Sistemi equivalenti.
5. Matrice completa di un sistema lineare.
6. Operazioni sulla matrice completa che portano da un sistema lineare ad uno equivalente. Sono le stesse operazioni che si possono fare sulle righe di una matrice senza modificarne il rango.
7. Equazioni superflue.
8. Sistemi omogenei. Se A è una matrice $m \times n$, allora il nucleo di A, indicato con $\ker A$, è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo
$$\ker A := \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0.$$
Il nucleo di A è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - \operatorname{rg}(A)$.
9. Traslati di sottospazi vettoriali (o sottospazi affini o varietà lineari).
10. Teorema di Rouché-Capelli: Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbb{R}^m$. Allora il sistema lineare
$$AX = B$$
è compatibile se e solo se $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\tilde{A})$, dove $\tilde{A} = (A|B)$.
11. I Teorema di struttura: se A è una matrice $m \times n$, le soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - \operatorname{rg} A$. Questo sottospazio vettoriale viene chiamato nucleo di A ed è indicato con il simbolo $\ker A$.
12. II Teorema di struttura: Se il sistema $AX = B$ è compatibile, allora l'insieme S delle soluzioni è un traslato di $\ker A$:
$$S = X_0 + \ker A := \{X \in \mathbb{R}^n : X - X_0 \in \ker A\}.$$
Dunque S è un sottospazio affine di dimensione $n - \operatorname{rg}(A)$.

23/11

1. Risoluzione di un sistema lineare mediante riduzione a scala.
2. Determinazione del rango di una matrice mediante riduzione a scala.
3. Pivot. Rappresentazione parametrica.
4. Sistemi lineari parametrici.
5. Esercizi sui sistemi lineari.

24/11

1. Il metodo di riduzione a scala permette di determinare una base di un sottospazio definito mediante equazioni cartesiane.
2. Il metodo di riduzione a scala permette di determinare le equazioni cartesiane di un sottospazio definito come Span di certi vettori.
3. Sistemi quadrati non singolari: $X = A^{-1}B$.
4. Applicazioni lineare $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definizione mediante le matrici.
5. Applicazioni lineari fra spazi vettoriali astratti. Nel caso di applicazioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ le due definizioni coincidono.
6. Se $L : V \to W$ è una applicazione lineare e $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V, allora $L(U)$ è un sottospazio vettoriale di W.
7. Nucleo e immagine di una applicazione lineare.
8. $\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Span}(A^1, \ldots, A^n)$, $\dim \operatorname{Im} L_A = \operatorname{rango}(A)$.
9. $\ker L_A = \ker A$.
10. Controimmagine di un punto mediante una funzione: se $f : X \to Y$ è una funzione, la controimmagine di $y \in Y$ mediante f è l'insieme
$$f^{-1}(y) := \{x \in X : f(x) = y\}.$$
11. Se $B \in \mathbb{R}^m$ e $A \in M(m,n)$, allora $L^{-1}(B)$ è l'insieme delle soluzioni di $AX = B$.

30/11

1. Siano V e W spazi vettoriali di dimesione n ed m rispettivamente. Sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Fissiamo $w \in W$. Se $w \notin \operatorname{Im} L$, allora $L^{-1}(w) = \varnothing$. Se invece $w \in \operatorname{Im} L$, allora $L^{-1}(w) \neq \varnothing$ e $L^{-1}(w)$ è un traslato del nucleo, ossia fissato un qualsiasi elemento v_0 di $L^{-1}(w)$, si ha
$$L^{-1}(w) = v_0 + \ker L.$$
Questa formula significa che un vettore v di V appartiene a $L^{-1}(w)$ se e soltantose $v - v_0$ appartiene a $\ker L$.

2. L è iniettiva se e solo se $\ker L = \{0\}$.

3. L è suriettiva se e solo se $\operatorname{Im} L = W$.

4. Se $\dim V = \dim W$, allora L è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è biunivoca. In tal caso la funzione inversa $L^{-1} : W \longrightarrow V$ è lineare.

5. Una applicazione lineare e biunivoca si chiama isomorfismo.

6. Se V ha dimensione n e $\mathcal{B}$ è una base di V, l'applicazione data dalle coordinate
$$[\bullet]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
è un isomorfismo.

7. Due spazi sono isomorfi (cioè esiste un isomorfismo fra di essi) se e solo se hanno la stessa dimensione.

8. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, \dots, w_n \in W$ dei vettori arbitrari. Allora esiste una ed una sola applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ tale che $L(v_j) = w_j$ per $j = 1, \dots, n$.

9. Sia $L : V \to W$ una applicazione lineare e sia $\mathscr{L} := \{v_1, \dots, v_n\}$. Poniamo $\mathscr{L}' := \{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$.
   (a) Se $\mathscr{L}$ è una lista linearmente dipendente, anche $\mathscr{L}'$ è linearmente dipendente.
   (b) Se $\mathscr{L}'$ è una lista linearmente indipendente, anche $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente.
   (c) Se L è iniettiva e $\mathscr{L}$ è linearmente indipendente, allora anche $\mathscr{L}'$ è linearmente indipendente.
   (d) Se L non è iniettiva, si può scegliere $\mathscr{L}$ in modo tale che $\mathscr{L}$ sia linearmente indipendente e $\mathscr{L}'$ sia linearmente dipendente.

10. Sia A una matrice $m \times n$. Allora L_A è iniettiva se e solo se $\operatorname{rg}(A) = n$, mentre L_A è suriettiva se e solo se $\operatorname{rg}(A) = m$.

11. Se B è una matrice $k \times n$, allora $L_B \circ L_A = L_{BA}$.

12. Matrice del cambiamento di base.

1/12, ore 9-10

1. Matrice associata ad una applicazione lineare: sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V ed una base $\mathcal{D} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W. La matrice associata ad L rispetto a queste basi è la matrice che ha come colonna j-esima il vettore
$$[L(v_j)]_{\mathcal{D}}.$$
Questa matrice viene indicata col simbolo $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}$. (Nel libro viene usato invece il simbolo $[[L]]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$.) Se $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}} = A = (a_{ij})$, allora
$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

2. Se $v \in V$ e $A = [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}$, allora
$$[L(v)]_{\mathcal{D}} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

3. Supponiamo che V, W, Z siano spazi vettoriali e che $L : V \longrightarrow W$ ed $S : W \longrightarrow Z$ siano applicazioni lineari. Fissiamo basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ di V, W e Z rispettivamente. Allora
$$[S \circ L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = [S]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}} \cdot [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}.$$

4. Se V è uno spazio vettoriale e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora la matrice dl cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ coincide con la matrice $[\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$. Se $v \in V$ ha coordinate X rispetto a $\mathcal{B}$ e X' rispetto a $\mathcal{B}'$ e M è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, allora
$$X' = MX.$$

5. La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è invertibile e la sua inversa è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

6. Sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V e $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ basi di W. Allora
$$[L]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{D}'} = M \cdot [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}} N^{-1}$$
dove $M = [\mathrm{id}_W]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}'}$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}'$ e $N = [\mathrm{id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

7/12

1. Sia $L : V \to W$ una applicazione lineare. Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base du V, allora $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ è un sistema di generatori di $\operatorname{Im} L$.

2. Se L è iniettiva, $\{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$ è una base di $\operatorname{Im} L$.

3. Se L è un isomorfismo, $\{L(v_1), \ldots, L(v_n)\}$ è una base di W. Dunque un isomorfismo manda basi di V in basi di W. Viceversa se una applicazione lineare L manda un base di V in una base di W, allora L è un isomorfismo.

4. Se $L : V \to W$ è lineare, $\mathcal{B}$ è una base di V e $\mathcal{D}$ è una base di W e $A = [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}$, allora

$$\ker L = \{v \in V : [v]_{\mathcal{B}} \in \ker A\},$$
$$\operatorname{Im} L = \{w \in W : [w]_{\mathcal{D}} \in \operatorname{Span}(A^1, \ldots, A^m)\}.$$

5. Se $A \in M(m,n)$, la matrice associata a L_A nella basi canoniche è A.

6. Esempi di applicazioni lineari. Rotazione di 90 gradi nel piano. Rotazione di angolo θ attorno all'asse delle z.

7. Esercizi sulle applicazioni lineari.

8. Matrici simili.

9. Operatori lineari. La matrice associata ad un operatore lineare $L : V \to V$ in una base $\mathcal{B}$ di V è la matrice $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

10. Se $L : V \to V$ è un operatore lineare e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di V, allora le matrici $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ e $[L]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}$ sono simili.

11. Supponiamo che due matrici A e A' (entrambe $n \times n$) siano simili. Dunque esiste $M \in \mathrm{Gl}(n)$ tale che $A' = M^{-1}AM$. Sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{B} = \{M^1, \ldots, M^n\}$ la lista formata dalle colonne di M. $\mathcal{B}$ è una base perché $M \in \mathrm{Gl}(n)$. Inoltre $M = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ e

$$A' = [L_A]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}},$$

mentre $[L_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = A$. In breve: due matrici simili rappresentano lo stesso operatore lineare rispetto a basi diverse.

12. Traccia di una matrice quadrata. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

13. Invarianti per similitudine: rango, determinante, traccia.

14. Autovettori, autovalori, spettro, autospazi di operatori lineari e di matrici.

15. Spettro e autovettori di matrici diagonali.

16. Operatori e matrici diagonalizzabili.

17. Un operatore $L : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se la matrice che rappresenta L rispetto ad una qualsiasi base di V è diagonalizzabile.

18. Polinomio caratteristico di una matrice. Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico.

19. Ogni polinomio reale si scrive come prodotto di polinomi di grado 1 o 2.

20. Un polinomio $p(t)$ di grado n è *totalmente decomponibile* se si scrive come prodotto di n polinomi di grado 1:

$$p(t) = a(t - t_1) \cdots (t - t_n).$$

21. Molteplicità di una radice di un polinomio.

14/12

1. Se $A \in M(n)$ ed esiste $M \in \mathrm{Gl}(n)$ tale che $D := M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale, allora i vettori colonna di M sono autovettori di A. L'autovalore di M^j è il j-esimo termine sulla diagonale della matrice D.

2. Transitività della relazione di similitudine: se $A \sim B$ e $B \sim C$, allora $A \sim C$.

3. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Questa è solo una condizione necessaria, non è sufficiente: esistono matrici con lo stesso polinomio caratteristico che *non* sono simili.

4. Sia $L : V \to V$ un operatore lineare. Se λ è un autovalore dell'operatore L (ossia della matrice $A = [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$), allora detta $m(\lambda)$ la molteplicità geometrica di λ e $\mu(\lambda)$ quella algebrica, si ha sempre

$$1 \leq m(\lambda) \leq \mu(\lambda).$$

5. Un autovalore λ è *regolare* se $m(\lambda) = \mu(\lambda)$.

6. Un autovalore λ è *semplice* se $\mu(\lambda) = 1$. Un autovalore semplice è automaticamente regolare.

7. Sia $\mathrm{spec}(L) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Allora

$$k \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq n = \dim V.$$

Infatti gli autospazi sono in somma diretta.

8. L è diagonalizzabile se e soltanto se $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

9. L è diagonalizzabile se e soltanto se il polinomio caratteristico di L è totalmente decomponibile e ogni autovalore è regolare.

15/12

1. Se un operatore $L : V \to V$ ha n autovalori distinti e $n = \dim V$, allora L è diagonalizzabile.

2. Sia $A \in M(n)$. Se il polinomio caratteristico p_A è totalmente decomponibile, $p_A(t) = (t - t_1) \cdots (t - t_n)$, allora
$$\det A = t_1 \cdots t_n, \qquad \operatorname{tr} A = t_1 + \cdots + t_n.$$

3. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. È bilineare simmetrico e definito positivo.

4. Norma. Omogeneità della norma: $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

5. Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (senza dimostrazione). Nozione di angolo fra due vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$.

6. Diseguaglianza triangolare per la norma: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

7. Caratterizzazione dell'uguaglianza nella diseguaglianza di Cauchy-Schwarz e nella diseguaglianza triangolare: se $|\langle x, y\rangle| = ||x|| \cdot ||y||$ o se $||x + y|| = ||x|| + ||y||$, allora x ed y sono linearmente dipendenti.

21/12

1. Distanza fra vettori di $\mathbb{R}^n$: $d(x, y) = ||x - y||$. Proprietà della distanza.

2. Sistemi e basi ortogonali e ortonormali.

3. Coefficienti di Fourier di un vettore rispetto a un sistema ortogonale.

4. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, i coefficienti di Fourier di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ coincidono con le coordinate di x rispetto alla base $\mathcal{B}$.

5. Dato un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$ poniamo
$$V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v\rangle = 0 \text{ per ogni } v \in V\}.$$
Se $\mathscr{L} = \{v_1, \ldots, v_h\}$ è una base di V, allora
$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v_j\rangle = 0 \text{ per ogni } j = 1, \ldots, h\}.$$

6. Sia $\mathcal{L} = \{v_1, \ldots, v_h\}$ un sistema ortogonale. Allora $\mathcal{L}$ è linearmente indipendente.

7. Poniamo
$$p_{\mathscr{L}}(x) := \sum_{i=1}^{h} c_i v_i$$

dove c_i e l'i-esimo coefficiente di Fourier di x rispetto al sistema ortogonale $\mathscr{L}$. Allora $p_{\mathscr{L}}(x) \in V := \mathrm{Span}(\mathscr{L})$ e $x - p_{\mathscr{L}}(x) \in V^{\perp}$. Inoltre se $x' \in V$ e $x'' \in V^{\perp}$ sono tali che $x = x' + x''$, allora necessariamente $x' = p_{\mathscr{L}}(x)$ e $x'' = x - p_{\mathscr{L}}(x)$. Inoltre il vettore $p_{\mathscr{L}}(x)$ dipende da x e da V, ma non dipende da $\mathscr{L}$.

8. Teorema di Pitagora generalizzato: $||x||^2 = ||x'||^2 + ||x''||^2$, dove $x' = p_{\mathscr{L}}(x)$ e $x'' = x - p_{\mathscr{L}}(x)$.

9. Algoritmo di Gram-Schmidt. Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette basi ortonormali. Ogni sistema ortogonale (o ortonormale) si può completare ad un sistema ortogonale (o ortonormale).

10. Matrici ortogonali. Condizioni equivalenti all'ortogonalità di una matrice $n \times n$.

11. Le matrici ortogonali sono le matrici di cambiamento di base fra due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$.

22/12

1. Matrici ortogonali 2×2.

2. Se $A \in M(n)$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, allora $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$.

3. Teorema spettrale: ogni matrice simmetrica A è diagonalizzabile e gli autospazi relativi ad autovalori distinti sono ortogonali. È possibile trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A. È possibile trovare una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM = D$ sia una matrice diagonale.

4. Forme quadratiche. Matrice associata ad una forma quadratica e forma quadratica associata ad una matrice simmetrica.

5. Segno di una forma quadratica: forme definite positive o negative, semidefinite positive o negative, indefinite.

6. Il caso diagonale. Il caso generale: per studiare il segno della forma quadratica Q_A associata alla matrice simmetrica A, è sufficiente studiare il segno degli autovalori di A.

7. Criterio dei minori incapsulati: sia A una matrice simmetrica $n \times n$ e per ogni $i - 1, \ldots, n$ sia Δ_i il minore $i \times i$ in alto a sinistra. Allora A è definita positiva se e solo se $\det \Delta_i > 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

9/1/2017, ore 14-16 in aula EF4

1. Svolgimento di un tema d'esame.