Calendario delle lezioni di Geometria III

15 gennaio 2015

Lezione 29/09, 10.30-12.30 aula u9-14

- $\mathrm{Hom}(V, W)$. Topologia e norma sugli spazi di matrici.
- Il prodotto di matrici è una funzione C^∞.
- L'applicazione $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ è C^∞.
- Differenziale di una funzione da un aperto di $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.
- Derivata direzionale. Derivate parziali.
- Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, $f : A \to \mathbb{R}^m$ e le derivate parziali di f esistono in un intorno di $x_0 \in A$ e sono continue in x_0, allora f è differenziabile in x_0.
- $f : A \to \mathbb{R}^m$ è di classe C^k se è differenziabile in ogni punto di A e l'applicazione $df : A \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è C^{k-1}. Ciò equivale a chiedere che f ammette derivate parziali $\partial f_i / \partial x_j$ su tutto A e che esse sono funzioni C^{k-1}.
- Funzioni lisce o C^∞.
- Derivata della funzione composta: se $f : A \to B$ è liscia, dove $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ sono aperti e $g : b \to \mathbb{R}^p$ pure è liscia, allora $g \circ f \in C^\infty(A, \mathbb{R}^p)$.
- Diffeomorfismi. Il differenziale di un diffeomorfismo è un isomorfismo di spazi vettoriali. Aperti diffeomorfi hanno la stessa dimensione.
- Sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1 (del valor medio)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto convesso ed* $f \in C^1(A, \mathbb{R})$*. Se* $x_0, x_1 \in A$ *esiste* $t \in (0,1)$ *tale che*

$$f(x_1) - f(x_0) = df((1-t)x_0 + tx_1)(x_1 - x_0). \tag{1}$$

Dimostrazione. Sia $u(t) = f((1-t)x_0 + tx_1)$. Si applichi il Teorema di Lagrange, ossia il Teorema valor medio in una variabile, alla funzione u. $\square$

Teorema 2 (della Funzione Inversa)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto e* $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ *una funzione di classe* C^∞*. Se* $d\varphi(x_0)$ *è un isomorfismo, allora esiste un intorno aperto* U *di* x_0 *tale che* $V = \varphi(U)$ *sia aperto e* $\varphi_{|U}$ *sia un diffeomorfismo di* U *su* V*.*

- Basi di uno spazio topologico.
- Spazi metrici separabili. Gli spazi metrici separabili ammettono basi numerabili.
- Varietà topologiche.
- Carte (o sistemi di coordinate) su una varietà topologica.
- Cambiamento di coordinate.

Lezione 01/10, 13.30-14.30 aula u9-08

- Carte compatibili.
- Atlanti. Atlanti massimali.
- Una varietà differenziabile n-dimensionale è una coppia $(X, \mathfrak{A})$, dove X è una varietà topologica n-dimensionale e $\mathfrak{A}$ è un atlante differenziabile massimale.
- Ogni atlante $\mathfrak{A}$ è contenuto in un unico atlante $\mathfrak{A}_{\max}$ definito nel modo seguente: una carta (U, φ) appartiene ad $\mathfrak{A}_{\max}$ se e solo se essa è compatibile con tutte le carte di $\mathfrak{A}$.

Esercitazione 01/10, 14.30-15.30 aula u9-08

- Esempi di varietà differenziabili: $\mathbb{R}^n$, aperti di $\mathbb{R}^n$.
- Se $(X, \mathfrak{A})$ è una varietà differenziabile e $A \subset X$ è un aperto, allora
$$\mathfrak{A}_A := \{(U, \varphi) \in \mathfrak{A} : U \subset A\}$$
è un atlante massimale su A. (Esercizio.)
- Due atlanti distinti per S^1. Danno luogo allo stesso atlante massimale.
- Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sono atlanti su X, allora $\mathfrak{A}_{\max} = \mathfrak{B}_{\max}$ se e solo ogni carta di $\mathfrak{A}$ è compatibile con ogni carta di $\mathfrak{B}$. (Esercizio.)

Lezione 06/10, 10.30-11.30 aula u9-14

- Richiami sulle azioni di gruppi. Azioni fedeli (o effettive). Azioni libere. Stabilizzatori. Orbite. Traslati. Se $E \subset X$ e $\pi : X \to X/G$ è la proiezione canonica, allora
$$\pi^{-1}\pi(E) = \bigcup_{g \in G} gE.$$
- Se G agisce su uno spazio topologico X per omeomorfismi, allora $\pi : X \to X/G$ è una identificazione aperta.
- Se $\pi : X \to X/\sim$ è una identificazione aperta, allora $X/\sim$ è di Hausdorff se e soltanto se $R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$ è chiuso.
- Se $p : X \to Y$ è una identificazione aperta e X è uno spazio topologico a base numerabile, allora anche Y lo è.

Esercitazione 06/10, 11.30-12.30 aula u9-14

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono varietà differenziabili.
- Esempio di uno spazio a base numerabile che ammette un atlante di carte compatibili, ma non è di Hausdorff.

Lezione 08/10, 13.30-15.30 aula u9-08

- Sia $(M, \mathfrak{A}_{\max})$ una varietà differenziabile. Una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ è *differenziabile* o *liscia* o C^∞ se per ogni carta $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}_{\max}$ si ha $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$.

- Una funzione liscia $f : M \to \mathbb{R}$ è automaticamente continua.

- Sia $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_{\max}$ un atlante. Allora è sufficiente che $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$ per le carte $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$.

- Siano M ed N varietà differenziabili. Una applicazione $F : M \to N$ è *differenziabile* o *liscia* o C^∞ se è continua e se per ogni carta (V, ψ) su N e per ogni carta (U, φ) su M o $U \cap F^{-1}(V) = \varnothing$ oppure
$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U \cap F^{-1}(V)), \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

- Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sono atlanti su M ed N rispettivamente, è sufficiente controllare che la condizione (2) sia verificata per $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ e $(V, \psi) \in \mathfrak{B}$.

- Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $h \in C^\infty(A)$. Allora dato $a \in A$ esistono $g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(A)$ tali che
  1. $h(x) = h(a) + \sum_{i=1}^n (x^i - a^i) g_i(x)$ per ogni $x \in A$;
  2. $g_i(a) = \frac{\partial h}{\partial x^i}(a)$.

- Germi di funzioni lisce in $p \in M$. Costruzione dello spazio $C^\infty_{M,p}$. Operazioni su di esso. $C^\infty_{M,p}$ è un'algebra commutativa con unità sul campo $\mathbb{R}$. Data $f \in C^\infty(U)$ con $p \in U$ indichiamo con f_p il germe di f in p.

- $\mathfrak{m}_p := \{f_p \in C^\infty_{M,p} : f(p) = 0\}$ è un ideale. $C^\infty_{M,p} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}_p$.

- Un vettore tangente v ad M in p è un funzionale lineare $v : C^\infty_{M,p} \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa la seguente regola di Leibniz:
$$v(f_p \cdot g_p) = v(f_p) \cdot g(p) + f(p) v(g_p).$$

- $v(1) = 0$. Inoltre $v(f_p \cdot g_p) = 0$, se $f_p, g_p \in \mathfrak{m}_p$. Dunque $v_{|\mathfrak{m}_p^2} \equiv 0$.

- $T_p M \cong (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^*$.

Lezione 10/10, 10.30-12.30 aula u9-14

- Se $f_p \in C^\infty_{M,p}$ e $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ è una carta vicino a p, allora

$$f_p = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i_p - a^i) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i}(a) + R$$

  dove $a = \varphi(p)$ e $R \in \mathfrak{m}_p^2$.

- Definiamo $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ mediante la formula

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (f_p) := \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i}(\varphi(p)).$$

- Se $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n)$ è una carta vicino a p, allora

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p (x^i_p) = \delta_{ij}.$$

  I vettori $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ formano una base di $T_p M$ e per ogni $v \in T_P M$ si ha

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i_p) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p.$$

- Se $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n)$ è un'altra carta vicino a p, allora posto $h := \varphi\psi^{-1}$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h^i}{\partial y^j}(\psi(p)) \, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p.$$

- Sia $\mathcal{C}$ l'insieme delle applicazioni lisce $\alpha : I_\alpha \to M$, dove $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e tali che $\alpha(0) = p$. Diciamo che $\alpha \sim \beta$ se esiste una carte (U, φ) con $p \in U$ tale che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bigg|_{t=0} \varphi\alpha(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bigg|_{t=0} \varphi\beta(t).$$

- Se questo succede in una carta, allora succede in tutte le carte.

- Alla curva $\alpha \in \mathcal{C}$ associamo il vettore tangente $\dot\alpha(0) \in T_pM$ definito dalla formula
$$\dot\alpha(0)(f_p) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bigg|_{t=0} f(\alpha(t)) \qquad f_p \in C^\infty_{M,p}.$$
- L'applicazione $\alpha \mapsto \dot\alpha(0)$ discende ad una applicazione biunivoca $\mathcal{C}/\sim \to T_pM$.
- Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, c'è un isomorfismo canonico $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
- Se X è uno spazio affine reale con spazio vettoriale associato $\vec{X}$, allora per ogni $p \in X$ c'è un isomorfismo canonico $T_pX \cong \vec{X}$.
- Definizione del differenziale di una mappa C^∞.

Lezione 15/10, 13.30-15.30 aula u9-08

- Interpretazione del differenziale tramite le curve.
- Se fisso delle carte su M e su N il differenziale è rappresentato dalla matrice jacobiana della rappresentazione locale:
$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\varphi(p))\,\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{(f(p)}.$$

Teorema 3 (della funzione inversa sulle varietà)**.** *Siano M ed N due varietà e sia $f : M \to N$ una applicazione differenziabile. Se $p \in M$ e df_p è un isomorfismo, allora esiste un aperto $U \subset M$ tale che $f(U)$ è aperto e tale che $f_{|U}$ è un diffeomorfismo di U su $f(U)$.*

Dimostrazione. Sia (W, φ) una carta su M con $p \in W$ e sia (V, ψ) una carta su N con $f(p) \in V$. Restringendo possiamo supporre $f(W) \subset V$. Siccome df_p è un isomorfismo, le due varietà hanno la stessa dimensione che indichiamo con n. Consideriamo la rappresentazione locale $\bar f = \psi f \varphi^{-1} : \varphi(W) \to \mathbb{R}^n$. La jacobiana di $\bar f$ in $\varphi(p)$ è una matrice invertibile. Per il teorema della funzione inversa esiste un aperto $A \subset \varphi(W)$ tale che $\varphi(p) \in A$, $\bar f(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ e $\bar f_{|A}$ è un diffeomorfismo di A su $\bar f(A)$. Allora $U := \varphi^{-1}(A)$ è aperto in M e $V' := \psi^{-1}\bar f(A)$ è aperto in N. Inoltre $f_{|U}$ è iniettiva e $V' = f(U)$. Consideriamo le carte ristrette (U, φ) e (V', ψ). Siccome $f_{|U}$ è iniettiva, esiste l'inversa $(f_{|U})^{-1} : V' \to U$. In queste carte la rappresentazione locale di $(f_{|U})^{-1}$ è $\bar{f}^{-1}$ che è una applicazione C^∞. Dunque $(f_{|U})^{-1}$ è una applicazione differenziabile, per cui $f_{|U}$ è un diffeomorfismo. □

Teorema 4 (del rango, versione iniettiva)**.** *Sia $f : M^m \to N^n$ una applicazione differenziabile. Sia p un punto di M tale che df_p è iniettivo e sia (U, φ) una carta su M con $p \in U$. Allora, restringendo eventualmente l'aperto U, si può trovare una carta (V, ψ) su N, tale che la rappresentazione locale di f è*

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0),$$

e tale che $f(U) = \{q \in V : y^{m+1}(q) = \cdots = y^n(q) = 0\}$.

Dimostrazione. Fissiamo una carta (W, η) su N tale che $f(p) \in W$. Restringendo possiamo supporre $f(U) \subset W$. Sia $\tilde{f} = \eta f \varphi^{-1}$ la rappresentazione locale. Il differenziale df_p è iniettivo, dunque $m \leq n$ e la jacobiana di $\tilde{f}$ in $\varphi(p)$ ha rango m. Riordinando le componenti di ψ possiamo supporre che

$$J\tilde{f}(\varphi(p)) = \begin{pmatrix} B \\ * \end{pmatrix},$$

con $B \in \mathrm{Gl}(m, \mathbb{R})$. Sia

$$\Phi : \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \Phi(x,t) := \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{n-m} t_i e_{m+i}.$$

In altri termini

$$\Phi(x,t) = (\tilde{f}^1(x,t), \dots, \tilde{f}^m(x,t), \tilde{f}^{m+1}(x,t) + t_1, \dots, \tilde{f}^n(x,t) + t_{n-m}).$$

Dunque

$$J\Phi(\varphi(p), 0) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ * & I_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Per il teorema della funzione inversa esiste un aperto A, tale che $\Phi(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$, $(\varphi(p), 0) \in A$ e $\Phi_{|A}$ è un diffeomorfismo. Restringendo, possiamo supporre che $A = A_1 \times A_2 \subset \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-m}$, dove A_1 e A_2 sono intorni aperti di $\varphi(p)$ e di 0 rispettivamente. Poniamo $U' := \varphi^{-1}(A_1)$ e $V := \eta^{-1}(\Phi(A))$. Allora $U' \subset U$ e $V \subset W$ sono aperti e $p \in U'$. Se $p' \in U'$, allora $\varphi(p') \in A_1$, dunque $\eta f(p') = \tilde{f}(\varphi(p')) = \Phi(\varphi(p'), 0) \in \Phi(A)$. Dunque $f(U') \subset V$. Poniamo $\psi := (\Phi_{|A})^{-1} \circ \eta_{|V} : V \to \mathbb{R}^n$. Allora (V, ψ) è una carta su N. Nelle carte (U', φ), (V, ψ) la rappresentazione locale di f è

$$\bar{f} := \psi f \varphi^{-1} = (\Phi_{|A})^{-1} \eta f \varphi^{-1} = (\Phi_{|A})^{-1} \tilde{f}.$$

Dunque se $x \in \varphi(U')$ si ha $\bar{f}(x) = (\Phi_{|A})^{-1}\Phi(x, 0) = (x, 0)$. Dunque le carte (U', φ) e (V, ψ) godono della prima proprietà richiesta. Veniamo alla seconda proprietà. Dobbiamo dimostrare che $f(U') = \{q \in V : y^{m+1}(q) = \cdots = y^n(q) = 0\}$. Poiché ψ è biunivoca, questa condizione equivale al fatto che $\psi f(U') = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. D'altro canto per costruzione $\psi(V) = A = A_1 \times A_2$. Quindi $\psi f(U') = \bar{f}(\varphi(U')) = \bar{f}(A_1) = A_1 \times \{0\} = (A_1 \times A_2) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Pertanto le carte (U', φ) e (V, ψ) godono anche della seconda proprietà richiesta. $\square$

Teorema 5 (del rango, versione suriettiva). *Sia $f : M^m \to N^n$ una applicazione differenziabile, sia $p \in M$ e sia (V, ψ) una carta su N con $f(p) \in V$. Se df_p è suriettivo, allora esiste una carta (U, φ) su M tale che $f(U) \subset V$ e tale che la rappresentazione locale di f è*

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n).$$

Dimostrazione. Fissiamo una carta (W, η) su M con $p \in W$ e $f(W) \subset V$. Sia $\tilde{f} = \psi f \eta^{-1}$ la rappresentazione locale di f. Per ipotesi df_p è suriettivo, dunque $m \geq n$ e la jacobiana $J\tilde{f}(\eta(p))$ ha rango n. Riordinando le componenti di η possiamo supporre che

$$J\tilde{f}(\eta(p)) = \begin{pmatrix} B & * \end{pmatrix},$$

con $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Per comodità indichiamo con (x, y) i punti di $\mathbb{R}^m$, dove $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^{m-n}$. Consideriamo l'applicazione

$$\Phi : \eta(W) \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \Phi(x, y) = (\tilde{f}(x, y), y).$$

Allora

$$J\Phi(\eta(p)) = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}.$$

Quindi $J\Phi(\eta(p))$ è invertibile. Per il teorema della funzione inversa esiste un aperto A contenente $\eta(p)$ tale che $\Phi(A)$ è aperto e $\Phi_{|A}$ è un diffeomorfismo su $\Phi(A)$. Poniamo $U := \eta^{-1}(A)$ e $\varphi := \Phi_{|A} \circ \eta_{|U}$. Allora (U, φ) è una carta, $f(U) \subset V$ e $p \in U$. Consideriamo la rappresentazione locale $\bar{f} = \psi f \varphi^{-1}$. Per ogni $(x, y) \in \varphi(U) = \Phi(A)$ si ha

$$\bar{f}(x, y) = \psi f \eta^{-1} (\Phi_{|A})^{-1}(x, y) = \tilde{f}(\Phi_{|A})^{-1}(x, y).$$

Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la proiezione sulle prime n coordinate: $\pi(x, y) = x$. Allora $\tilde{f} = \pi\Phi$, dunque

$$\bar{f}(x, y) = \tilde{f}(\Phi_{|A})^{-1}(x, y) = \pi\Phi(\Phi_{|A})^{-1}(x, y) = \pi(x, y) = x.$$

Dunque $\bar{f}(x, y) = x$. □

Lezione 20/10, 13.30-15.30 aula u9-08

Definizione 6. *Sia $(M, \mathfrak{A}_{\max})$ una varietà differenziabile di dimensione m e sia Z un sottoinsieme di M. Diciamo che una carta (U, φ) di M, con $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$, è una* carta n-dimensionale adattata a Z *se $U \cap Z = \{x^{n+1} = \cdots = x^m = 0\}$. Diciamo che $Z \subset M$ è una* sottovarietà regolare *di M di dimensione n se per ogni punto $p \in Z$ esiste una carta n-dimensionale (U, φ) adattata a Z con $p \in Z$.*

- Una sottovarietà di dimensione 0 di M è semplicemente un sottoinsieme discreto di M.
- Una sottovarietà di dimensione m di M^m è semplicemente un sottoinsieme aperto di M.
- Se X è uno spazio topologico a base numerabile, allora ogni sottospazio $Y \subset X$ ammette una base numerabile.
- Se X è uno spazio a base numerabile, ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito (teorema di Lindelöf, [7, p. 103].

Teorema 7. *Sia $Z \subset M^m$ una sottovarietà regolare di dimensione n. Sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di carte adattate ad Z tale che $\bigcup_{\alpha \in I} = Z$. Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la proiezione $\pi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$. Allora $\mathfrak{B} = \{(U_\alpha \cap Z, \pi\varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ è un atlante differenziabile su Z, dove si considera su Z la topologia di sottospazio. Nella struttura differenziabile determinata da questo atlante l'inclusione $i : Z \hookrightarrow M$ è una immersione liscia.*

Dimostrazione. La topologia di sottospazio su Z è di Hausdorff e a base numerabile. Osserviamo che $\varphi_{\alpha|U_\alpha \cap Z}$ è un omeomorfismo su $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}$. D'altronde π è un omeomorfismo di $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ su $\mathbb{R}^n$. Quindi $\pi\varphi_{\alpha|U_\alpha \cap Z}$ è un omeomorfismo, quindi è una carta per Z nella topologia di sottospazio. Per ipotesi queste carte ricoprono Z. Ora supponiamo che $U_\alpha \cap U_\beta \cap Z \neq \varnothing$. Allora

$$\begin{aligned} \pi\varphi_{\beta|U_\beta \cap Z} &= \pi_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \circ \varphi_{\beta|U_\beta \cap Z} \\ (\pi\varphi_{\beta|U_\beta \cap Z})^{-1}(x) &= \varphi_\beta^{-1} \circ (\pi_{\mathbb{R}^n \times \{0\}})^{-1}(x) = \varphi_\beta^{-1}(x, 0) \\ \pi\varphi_\alpha(\pi\varphi_{\beta|U_\beta \cap Z})^{-1}(x) &= \pi\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}(x, 0). \end{aligned}$$

Questo cambiamento di coordinate è C^∞ perché $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$ è C^∞. Dunque $\mathfrak{B}$ è un atlante e Z è una varietà differenziabile. La rappresentazione locale della inclusione nelle carte $(U_\alpha \cap Z, \pi\varphi_\alpha)$ e $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è semplicemente $\bar{i}(x) = (x, 0)$. Dunque i è liscia ed è una immersione. □

- Punti critici. Valori critici. Valori regolari. L'insieme $\mathrm{Crit}(f)$ è chiuso. Per ogni applicazione liscia $f : M \to N$ i punti di $N - f(M)$ sono valori regolare.

Teorema 8 (del Valore Regolare)**.** *Sia $f : M^m \to N^n$ una applicazione liscia e sia $q \in N$ un valore regolare. Se $Z := f^{-1}(q)$ è non vuota, allora è una sottovarietà regolare di dimensione $m - n$.*

Dimostrazione. Sia $p \in Z$. Siccome q è valore regolare, il differenziale df_p è suriettivo. Per il teorema del rango nel caso suriettivo si possono trovare delle carte (U, φ) e (V, ψ) tali che $\bar{f}(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^n)$. Si può anche supporre che $\psi(q) = 0$. Sia $x \in \varphi(U)$. Allora si ha $x \in \varphi(U \cap Z)$ se e solo se $\varphi^{-1}(x) \in U \cap Z$ se e solo se $f\varphi^{-1}(x) = q$ se e solo se $\bar{f}(x) = 0$. Ma $\bar{f}(x) = (x^1, \ldots, x^n)$, dunque $\varphi(U \cap Z) = \varphi(U) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$. Pertanto (U, φ) è una carta adattata $(m - n)$-dimensionale.

□

- Insiemi di misura nulla. Teorema di Sard: prima passo della dimostrazione.

Lezione 22/10, 13.30-14.30 aula u9-08

- Teorema di Sard: fine della dimostrazione.

- Se $m < n$ ed $f : M^m \to N^n$ è una applicazione differenziabile, allora $f(M) \subsetneq N$. Applicazione: se $f : M^m \to S^n$ è differenziabile e $m < n$, allora f è omotopa ad una applicazione costante.

Esercitazione 22/10, 14.30-15.30 aula u9-08

- $\mathrm{O}(n)$ è una varietà differenziabile di dimensione $n(n-1)/2$. Sia Σ_n lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche e sia $\mathfrak{o}(n)$ quello delle matrici reali simmetriche. Allora $\dim \Sigma_n = n(n+1)/2$ e $\dim \mathfrak{o}(n) = n(n-1)/2$.. Sia $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \Sigma_n$ l'applicazione $f(A) = A^T A$. È una applicazione differenziabile, $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(I)$ e $df_A(X) = X^T A + A^T X$. Se $A \in \mathrm{O}(n)$, $df_A(X) = (A^{-1}X) + (A^{-1}X)^T$. Sia $L_A : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'applicazione $L_A(X) = AX$. Se $A \in \mathrm{O}(n)$, otteniamo $\ker df_A = L_A(\mathfrak{o}(n))$. Pertanto per ogni $A \in \mathrm{O}(n)$ il differenziale $df_A : T_A \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \Sigma_n$ ha nucle di dimensione $n(n-1)/2$ e quindi è suriettivo. Ciò significa che I è un valore regolare di f. Siccome chiaramente $\mathrm{O}(n) \neq \varnothing$, il teorema del valore regolare assicura che $\mathrm{O}(n)$ è una sottovarietà regolare di $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ di dimensione $n(n-1)/2$.

Lezione 27/10, 10.30-12.30 aula u9-14

- Partizione dell'unità.

- Aggiunta al Teorema del Valore Regolare: Sia $f : M^m \to N^n$ una applicazione liscia e sia $q \in N$ un valore regolare. Se $Z := f^{-1}(q)$ è non vuota, allora è una sottovarietà regolare di dimensione $m - n$. Indichiamo con $i : Z \hookrightarrow M$ l'inclusione. Allora i è una applicazione C^∞ con differenziale iniettivo in ogni punto. E si ha $di_p(T_p Z) = \ker df_p$.

- Se $f : M^m \to N^n$ una applicazione liscia, $Z \subset N$ è una sottovarietà regolare e $f(M) \subset Z$, allora possiamo considerare l'applicazione $g : M \to Z$ tale che $g(p) := f(p)$ per ogni $p \in M$. (g è semplicemente f con codominio cambiato.) Allora g è liscia.

- Definizione di gruppo di Lie.

- $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie.
- $\mathrm{O}(n)$ è un gruppo di Lie e $T_I \mathrm{O}(n) = \mathfrak{o}(n)$.

Lezione 29/10, 13.30-15.30 aula u9-08

- Diffeomorfismi locali. Una mappa $f : M \to N$ è un diffeomorfismo locale se e solo se df_p è un isomorfismo per ogni $p \in M$.
- Un diffeomorfismo locale biunivoco è un diffeomorfismo.
- Immersioni e sommersioni.
- Curve regolari.
- Una applicazione $f : M \to N$ è un *embedding* se è una immersione ed è un omeomorfismo di M su $f(M)$.
- Se $Z \subset M$ è una sottovarietà regolare, allora l'inclusione $i''Z \hookrightarrow M$ è un embedding.

Teorema 9. *Se $f : M \to N$ è un embedding, allora $Z := f(M)$ è una sottovarietà regolare e $f : M \to Z$ è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $q \in Z$ e sia $p \in M$ l'unico punto tale che $f(p) = q$. Scegliamo carte (U, φ) e $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n)$ come nel teorema del rango nella versione iniettiva. Allora $f(U) = V \cap \{y^{m+1} = \cdots = y^n = 0\}$. Siccome f è un omeomorfismo su Z, $f(U)$ è aperto in Z. Dunque esite $V' \subset N$ aperto tale che $f(U) = V' \cap Z$. Poniamo $V'' := V \cap V'$. Allora $f(U) \subset V \cap V'$, dunque

$$\begin{gathered}V'' \cap Z = V' \cap Z \cap V = f(U) \cap V = f(U) = \\ = f(U) \cap V' = V \cap \{y^{m+1} = \cdots = y^n = 0\} \cap V' = \\ = V'' \cap \{y^{m+1} = \cdots = y^n = 0\}.\end{gathered}$$

Quindi (V'', ψ) è una carta adattata. Pertanto Z è una sottovarietà regolare. L'applicazione $f : M \to Z$ è liscia, biunivoca ed è una immersione. Siccome $\dim M = \dim Z$ è un diffeomorfismo locale. Ma allora è un diffeomorfismo. $\square$

- Se $f : M \to N$ è una immersione iniettiva e M è compatta, allora f è un embedding.

- Teorema di immersione di Whitney: se M è una varietà compatta esiste un embedding di M in uno spazio euclideo di dimensione sufficientemente grande, [1, p. 189-190].

Esercitazione 29/10, 14.30-15.30 aula u9-08

- Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x) = 0$ per $x < 0$ e $f'(x) > 0$ per $x > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, allora la curva $\alpha(t) := (f(t), f(t))$ ha come immagine l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 0\}$. Se $t \neq 0$ il vettore tangente $\dot{\alpha}(t) \neq 0$.

- Esempi di immersioni iniettive che non sono embedding: [1, p. 71].

- Esempio di una immersione iniettiva $\mathbb{R} \to T^2 = S^1 \times S^1$ con immagine densa.

Lezione 03/11, 10.30-12.30 aula u9-14

Lemma 10. *Sia M un insieme, per ogni $\alpha \in I$ sia U_α un sottoinsieme di M e siano $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ delle applicazioni. Supponiamo che valgano le seguenti ipotesi:*

1. *$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ per ogni $\alpha \in I$;*

2. *$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ per ogni $\alpha, \beta \in I$;*

3. *per ogni α l'applicazione $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ è biunivoca;*

4. *per ogni $\alpha, \beta \in I$ l'applicazione $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ è un diffeomorfismo;*

5. *esiste un sottoinsieme numerabile $I_0 \subset I$ tale che $M = \bigcup_{\alpha\in I_0} U_\alpha$;*

6. *se $p, q \in M$ e $p \neq q$ o esiste $\alpha \in I$ tale che $p, q \in U_\alpha$, oppure esistono $\alpha, \beta \in I$ tali che $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ e $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$.*

Allora esiste su M una topologia di Hausdorff a base numerabile tale che le applicazioni φ_α siano omeomorfismi. Se si considera su M questa topologia, allora $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ è un atlante differenziabile.

Per la dimostrazione si veda per esempio [5, Lemma 1.35 p. 21].

- Fibrati localmente banali. Banalizzazioni.
- Fibrati vettoriali. Funzioni di transizione. Sezioni
- Il fibrato tangente è una varietà.

Lezione 05/11, 13.30-15.30 aula u9-08

- L'applicazione $\pi : TM \to M$ è liscia ed è una sommersione.
- Se $f : M \to N$ è liscia, l'applicazione
$$TM \to TN \quad v \mapsto df_{\pi(v)}(v)e$$
è liscia.
- Il fibrato tangente è un fibrato vettoriale reale differenziabile di rango uguale alla dimensione della varietà.
- L'insieme $\Gamma(U, E)$ delle sezioni C^∞ del fibrato E su un aperto U è uno spazio vettoriale ed anche un modulo sull'anello $C^\infty(U)$.

Teorema 11. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un aperto e siano $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ed $F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Supponiamo che $0 \in \mathbb{R}^m$ sia un valore regolare di g e che $X := g^{-1}(0)$ sia non vuoto. Poniamo $f := F_{|X}$ e $h := (F, g) : \Omega \to \mathbb{R}^{m+k}$. Allora*
$$\mathrm{Crit}(f) = \mathrm{Crit}(h) \cap X.$$

Dimostrazione. Per il teorema del valore regolare X è una sottovarietà regolare di dimensione n. Sia $i : X \hookrightarrow \Omega$ l'inclusione. Identifichiamo T_pX con $di_p(T_pX) \subset T_p\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k}$. Allora $T_pX = \ker dg_p$ e $df_p = dF_{p|T_pX}$. Inoltre
$$dh_p = \begin{pmatrix} dF_p \\ dg_p \end{pmatrix}.$$
Dunque
$$\ker df_p = \ker dF_p \cap T_PX = \ker df_p \cap \ker dF_P = \ker dh_p.$$
Per la formula di Grassmann
$$\begin{aligned} \dim \ker dh_p &= n + m - \dim \mathrm{Im}\, dh_p \\ \dim \mathrm{Im}\, df_p &= \dim T_pX - \dim \ker df_p = \\ &= n - \dim \ker dh_p = \dim \mathrm{Im}\, dh_p - m. \end{aligned}$$

Quindi p è critico per $f : X \to \mathbb{R}^k$ se e solo se $\dim \operatorname{Im} df_p < k$ se e solo se $\dim \operatorname{Im} dh_p < m + k$ se e solo se p è critico per $h : \Omega \to \mathbb{R}^{m+k}$. $\square$

Teorema 12. *Sia $f : M \to N$ una sommersione suriettiva. Allora p è una identificazione aperta. Se Z è una varietà differenziabile e sia $g : M \to Z$ una applicazione che passa al quoziente, cioè esiste $h : N \to Z$ tale che $g = hf$. Allora g è liscia se e soltanto se h è liscia.*

Dimostrazione. Le sommersioni sono aperte, dunque f è continua suriettiva e aperta. Quindi è una identificazione (cioè una mappa quoziente). Se g è continua, anche h è continua. Resta da verificare che se g è C^∞ anche h lo è. Fissiamo $q \in N$. Per il teorema del rango possiamo fissare una carta (U, φ) su M ed una carta (V, ψ) su N vicino a q, in modo tale che la rappresentazione locale sia $\bar{f}(x, y) = x$. Sia poi (W, η) una carta su Z. Possiamo supporre restringendo che $g(U) \subset W$ e $f(U) \subset V$. Siccome $\bar{f}$ è la proiezione sulle prime n coordinate, $\bar{f}$ è aperta e $\bar{f}(\varphi(U))$ è aperto in $\psi(V)$. Restringendo V possiamo supporre $\bar{f}(\varphi(U)) = \psi(V)$, cioè $f(U) = V$. Ora le rappresentazioni locali soddisfano $\bar{h}\bar{f} = \bar{g}$, quindi $\bar{h}(x) = \bar{g}(x, y)$ per ogni x nell'aperto $\psi(V)$. In realtà siccome g passa al quoziente, $\bar{g}$ non dipende da y. Dunque $\bar{h}(x) = \bar{g}(x)$. Quindi h è liscia su V. $\square$

Lezione 10/11, 10.30-12.30 aula u9-14

- Un campo vettoriale su una varietà M è una sezione C^∞ di TM. L'insieme dei campi vettoriali si indica con $\mathfrak{X}(M)$. È uno spazio vettoriale reale.

- Se $(U, x^1, \ldots, x^n)$ è un aperto coordinato, le applicazioni
$$U \ni p \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$
sono campi vettoriali su U. Indichiamo questi campi con il simbolo $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Ogni $X \in \mathfrak{X}(U)$ è della forma
$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$
dove ξ^i sono funzioni su U. Sia τ la banalizzazione di TM ottenuta tramite φ. Allora $\tau(X) = (x, \xi)$. Pertanto $\xi^i \in C^\infty(U)$.

- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T\Omega \cong \Omega \times \mathbb{R}^n$ e i campi vettoriali su Ω sono della forma $X(x) = (x, F(x))$ con $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ liscia. Identificheremo X ed F.

- Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo e $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo un campo $f_* X \in \mathfrak{X}(N)$ mediante la formula
$$f_* X(q) := df_{f^{-1}(q)} \left(X \left(f^{-1}(q) \right) \right).$$

- $\alpha : (a, b) \to M$ è curva integrale di $X \in \mathfrak{X}(M)$ se per ogni $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$ per ogni $t \in (a, b)$.

- Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo, $X \in XX(M)$, e $\alpha : (a, b) \to M$, allora α è curva integrale di X se e soltanto se $f \circ \alpha$ è curva integrale di $f_* X$.

- Sia $\varphi = (x^1, \ldots, x^n) : U \to \varphi(U)$ una carta su M. Allora $\varphi_* \frac{\partial}{\partial x^i} = e_i$. Infatti $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ coincide con il vettore tangente alla curva $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$. Quindi
$$d\varphi_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) = e_i$$
dunque $\varphi_* \frac{\partial}{\partial x^i} = e_i$. Se $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, allora
$$\varphi_* X = (\xi^1 \varphi^{-1}, \ldots, \xi^n \varphi^{-1}).$$

Teorema 13. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^∞.*

1. *Per ogni $x_0 \in \Omega$ ed ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ esiste un intervallo aperto I con $t_0 \in I$ ed esiste una applicazione liscia $x : I \to \Omega$ tale che*
$$\dot{x} = F(x)$$
$$x(t_0) = x_0.$$

2. *Se $y : J \to \Omega$ è un altra soluzione, cioè $t_0 \in J$, $y(t_0) = x_0$ e $\dot{y} = F(y)$, allora $x = y$ in un intorno di t_0.*

3. *Se $x_0 \in \Omega$, esistono $\varepsilon > 0$, un intorno aperto V di x_0 ed una applicazione liscia $\theta : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to \Omega$ tali che per ogni $x \in \Omega$ $\theta(0, x) = x$ e $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto \theta(t, x)$ è una curva integrale di F, ossia*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \theta(t, x) = F(\theta(t, x))$$
per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

- Esistenza del flusso localmente: Teorema 4.2 di [1, p. 133].
- Per ogni $p \in M$ esiste una curva integrale massimale definita su un intervallo aperto $I(p) \subset \mathbb{R}$, vedi Teorema 4.3 di [1, p. 134].
- Corollario 4.4 e Teorema 4.5 di [1, p. 135-6].
- Lemma 5.1 e Corollario 5.3 di [1, p. 139-140].
- Un campo è *completo* se $W = \mathbb{R} \times M$. In questo caso $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ è una azione C^∞ di $(\mathbb{R}, +)$ su M.

Teorema 14 (di linearizzazione)**.** *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $X(p) \neq 0$, allora esiste una carta (U, x^i) vicino a p tale che su U si abbia $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$.*

Dimostrazione. Sia $\{X(p), v_2, \ldots, v_n\}$ una base di T_pM. Sia $g : \mathbb{R}^{n-1} \to M$ una applicazione C^∞ tale che $g(0) = p$, $dg_0(e_i) = v_i$ per $i = 2, \ldots, n$. (Chiamo $\{e_2, \ldots, e_n\}$ la base standard di $\mathbb{R}^{n-1}$.) Siano $\varepsilon > 0$ e V un intorno di p tali che sia definito e liscio il flusso $\theta : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to M$ di X. Su un intorno di $0 \in \mathbb{R}^n$ è definita la mappa

$$h(x_1, \ldots, x_n) := \theta(x_1, g(x_2, \ldots, x_n)).$$

Si verifica che $dg_0(e_1) = X(p)$, $dg_0(e_i) = v_i$ per $i \geq 2$. Dunque dg_0 è un isomorfismo. per il teorema della funzione inversa esiste un aperto Ω contenente 0 tale che $U := h(\Omega)$ è aperto e $h_{|\Omega} : \Omega \to U$ è un diffeomorfismo. Sia $\varphi := (h_{|\Omega})^{-1}$. Quindi $\varphi : U \to \Omega$ è una carta. Resta da dimostrare che in questa carta $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Ciò equivale a verificare che $\varphi_* X = e_1$. Calcoliamo il flusso di $\varphi_* X$. Siccome θ è il flusso di X, il flusso di $\varphi_* X$ è dato da

$$\begin{gathered}(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega \to \mathbb{R}^n \\ (t, x) \mapsto \varphi\theta(t, \varphi^{-1}(x)).\end{gathered}$$

Ma

$$\begin{gathered}\varphi\theta(t, \varphi^{-1}(x)) = \varphi\theta(t, h(x)) = \varphi\theta(t, \theta(x_1, g(x_2, \ldots, x_n))) = \\ = \varphi\theta(t + x_1, g(x_2, \ldots, x_n)) = \\ = \varphi h(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \ldots, x_n).\end{gathered}$$

Dunque il flusso di $\varphi_* X$ coincide con il flusso di e_1. Pertanto $\varphi_* X = e_1$ e $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

$\square$

Esercitazione 12/11, 8.30-10.30 aula u1-06

- Ogni varietà compatta M^n ammette sempre un embedding in $\mathbb{R}^{2n+1}$. Vedi p.e. [5, Lemma 6.13 p. 132].

- Fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Poniamo $V := \mathbb{C}^{n+1}$ e $\mathbb{P} = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Sia $E := \{(\ell, v) \in \mathbb{P} \times V : v \in \ell\}$.

  Poniamo anche

  $$U_j = \{[z] \in \mathbb{P} : z_j \neq 0\} \qquad \tilde{U}_j = \{z \in V : z_j \neq 0\}.$$

  Si verifica che $\pi : V - \{0\} \to \mathbb{P}$ è liscia ed è una sommersione e anche che E è una sottovarietà di $\mathbb{P} \times V$. Sia $p := \mathrm{pr}_{1\,|E} : E \to \mathbb{P}$. Questa è una applicazione liscia. La fibra di p su ℓ è $\{\ell\} \times \ell$. Su di essa fissiamo la struttura di spazio vettoriale complesso di dimension 1 tale che la proiezione sul secondo fattore sia un isomorfismo $\mathrm{pr}_2 : \{\ell\} \times \ell \to \ell$. Consideriamo le funzioni $f_j : U_j \to V$, $f_j([z]) = z/z_j$. Esse sono lisce. Poniamo $s_j([z]) = ([z], f_j(z))$. Per ogni $[z] \in U_j$, il vettore $s_j(z) \in E_{[z]}$ è non nullo, dunque è una base della retta $p^{-1}(\ell)$. Definiamo $\tau_j : p^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}$ nel modo seguente: se $\xi \in p^{-1}(U_j)$, allora posto $\ell = p(\xi)$, ho $\xi \in E_\ell$, dunque $\xi = \lambda \cdot s_j(\ell)$. Allora definisco

  $$\tau_j(\xi) := (\ell, \lambda).$$

  τ_j è un diffeomorfismo di $p^{-1}(U_j)$ su $U_j \times \mathbb{C}$. Inoltre è una banalizzazione e $p : E \to \mathbb{P}$ è un fibrato vettoriale complesso di rango 1.

- Embedding di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ nello spazio delle matrici Hermitiane. Consideriamo il prodotto Hermitiano standard su $\mathbb{C}^{n+1}$,

  $$\langle z, w \rangle = \sum_{i=0}^{n} z_i \bar{w}_i.$$

  Il prodotto scalare reale è la parte reale di $\langle\ ,\ \rangle$ e $T_z S^{2n+1} = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, w \rangle \in i\mathbb{R}\}$. Sia H lo spazio vettoriale (reale!) delle matrici Hermitiane $(n+1) \times (n+1)$.

  Definiamo $F : S^{2n+1} \to H$ decidendo che $F(z) : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ è la proiezione ortogonale (in senso Hermitiano) sulla retta $\mathbb{C}z$. Si verifica che se $w \in \mathbb{C}^{n+1}$, allora $F(z)(w) = \langle w, z \rangle z$. Pertanto F è liscia. F

passa al quoziente perché la proiezione su una retta dipende solo dalla retta, non dal generatore scelto per essa. Quindi esiste $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to H$ continua.

Se $w \in T_z S^{2n+1}$, allora $dF_z(w) \in H$ e l'azione di $dF_z(w)$ su un vettore $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ è

$$dF_z(w)v = \langle v, w\rangle z + \langle v, z\rangle w.$$

Se $w \in \ker dF_z$, scelgo $v = w$ e ottengo $w = itz$ con $t \in \mathbb{R}$. Dunque $\ker dF_z = i\mathbb{R}z$.

L'applicazione $\pi_{|S^{2n+1}} : S^{2n_1} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è ancora sommersiva e $\ker d\pi_z = i\mathbb{R}z$. Dunque f è liscia ed è una immersione. Siccome è anche iniettiva è un embedding che identifica $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con l'insieme dei proiettori ortogonali di rango 1.

Esercitazione 17/11, 10.30-11.30 aula u9-14

- Differenziale del determinante.
- $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ sono gruppi di Lie. $\mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$ sono gruppi di Lie compatti.

Lezione 17/11, 11.30-12.30 aula u9-14

- Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. Consideriamo l'applicazione $D_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definita dalla formula
$$(D_x f)(p) := X(p) f_p.$$
(f_p è il germe di f in p.) L'applicazione D_x è una *derivazione*, cioè è $\mathbb{R}$-lineare e inoltre $D_X(fg) = (D_X f)g + f(D_X g)$. Indichiamo la funzione $D_X f$ semplicemente con la notazione Xf.
- Commutatore di campi vettoriali, vedi [1, p. 152].

Lezione 19/11, 13.30-14.30 aula u9-08

- Definizione della derivata di Lie di due campi vettoriali.
- La derivata di Lie è ancora un campo vettoriale.
- la derivata di Lie di due campi vettoriali coincide con il commutatore: $L_X Y = [X, Y]$.

Esercitazione 19/11, 14.30-15.30 aula u9-08

- Definizione della grassmanniana.
- La grassmanniana è uno spazio di Hausdorff.

Lezione 24/11, 10.30-12.30 aula u9-14

- Omotopia e omotopia relativa.
- L'omotopia è una relazione di equivalenza.
- Due mappe nello stesso convesso sono sempre omotope relativamente al sottoinsieme in cui coincidono.
- Omotopia e composizione: se $H : f \simeq g \operatorname{rel} A$, $K : h \simeq k \operatorname{rel} B$ e $f(A) \subset B$, allora $F : h \circ f \simeq k \circ g \operatorname{rel} A$ dove $F(x,t) := K(H(x,t),t)$.
- Spazi contraibili. I convessi sono contraibili.
- Cammini in uno spazio topologico. $\Omega(X,a,b)$, giunzione, inversione di cammini.
- Definizione di $\pi_0(X)$.
- Equivalenza omotopica di cammini.
- La giunzione e l'inversione di cammini si comportano bene rispetto alla relazione $\sim$.
- La giunzione e l'inversione di cammini si comportano bene rispetto alla composizione con applicazioni continue.
- Se $X \subset \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme convesso, allora per ogni $a, b \in X$ il quoziente $\Omega(X,a,b)/\sim$ contiene esattamente un punto.
- $\alpha \circ \varphi \sim \alpha$.
- Associatività della giunzione a meno di equivalenza omotopica:

$$\alpha * (\beta * \gamma) \circ \varphi = (\alpha * \beta) * \gamma$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le 1/4 \\ t + 1/4 & 1/4 \le t \le 1/2 \\ 3/4 + \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}) & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

- Se E è convesso e $p, q \in E$ allora la *parametrizzazione standard del segmento* $\overline{pq}$ è

$$f_{pq}(t) = (1-t)p + tq.$$

- Se a, b, c sono punti di un convesso, allora $f_{ab} * f_{bc} \sim f_{ac}$. Stesso discorso per n punti.
- Cammino 1_a, $\alpha * 1_b \sim 1_a * \alpha \sim \alpha$.
- $\alpha * i(\alpha) \sim 1_a$.
- Spazi puntati, mappe di spazi puntati.
- Definizione di gruppo fondamentale e dimostrazione del fatto che è un gruppo.
- Morfismo indotto.
- Proprietà funtoriali di π_1.

Esercitazione 26/11, 13.30-15.30 aula u9-08

- Equivalenze omotopiche e tipo di omotopia
- L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza fra spazi topologici.
- Dipendenza dal punto base: morfismo $\gamma_\#$.
- π_1 dipende solo dalla componente connessa per archi.
- Se $H : f \simeq g$ e $\gamma(t) := H(x, t)$, allora $g_* = \gamma_\# f_*$.
- Se $f \simeq \mathrm{id}_X$ allora f_* è un isomorfismo.
- Lemma sulle 3 mappe, [7, p. 189].
- Se f è un'equivalenza omotopica, allora f_* è un isomorfismo.

- Definizione di rivestimento: siano E ed X spazi topologici localmente connessi per archi. Supponiamo che X sia anche connesso. Una applicazione $p : E \to X$ è un *rivestimento* se è continua e suriettiva e se per ogni $x \in X$ esiste un aperto connesso $V \subset X$, tale che $x \in V$ e tale che per ogni componente connessa U di $p^{-1}(V)$ la restrizione $p_{|U} : U \to V$ è un omeomorfismo.

- Definizione di spazio totale, base, aperti banalizzanti.

- I rivestimenti sono omeomorfismi locali e anche identificazioni aperte. Tutte le fibre di un rivestimento hanno la stessa cardinalità.

- Definizione di grado.

- La mappa $p : \mathbb{R} \to S^1, p(t) = e^{2\pi it}$ è un rivestimento.

- Definizione di sollevamento.

- Teorema di Unicità del Sollevamento:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "g", "h"'] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

  Se Z è uno spazio connesso e g ed h sono due sollevamenti di f, allora o $g \equiv h$ o $g(z) \neq h(z)$ per ogni $z \in Z$.

- Teorema di Sollevamento dei Cammini. Dato $\alpha : [0, 1] \to X$ ed un punto $e \in p^{-1}(\alpha(0))$ esiste uno ed un solo sollevamento α_e di α tale che $\alpha_e(0) = e$.

- Il sollevamento del cammino costante è costante. Se $e \in p^{-1}(x)$, $\alpha \in \Omega(X, x, x')$ e $e' = \alpha_e(1)$, allora $(i(\alpha))_{e'} = i(\alpha_e)$.

- Teorema di Sollevamento delle Omotopie. Consideriamo un diagramma di applicazioni continue

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Z \times [0,1] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{H}"] & X
\end{tikzcd}
$$

  dove $i_0(z) = (z, 0)$. Supponiamo che p sia un rivestimento e che $H \circ i_0 = p \circ \tilde{f}$. Se Z è localmente connesso, allora esiste una omotopia $\tilde{H}$ tale che $\tilde{H} \circ i_0 = \tilde{f}$ e $p \circ \tilde{H} = H$. Inoltre se $A \subset Z$ e H è rel A, allora anche $\tilde{H}$ è rel A. Vedi [2, p.140-141].

- Se $\alpha \simeq \beta$ ed $e \in p^{-1}(\alpha(0))$, allora $\alpha_e \simeq \beta_e$ e in particolare $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$.

- $\pi_1(S^1, 1) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

- Se $E \xrightarrow{p} X$ è un rivestimento, il morfismo indotto

$$p_* : \pi_1(E, e) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

  è iniettivo.

- Un rivestimento $p : E \to X$ è detto *connesso* se lo spazio totale è connesso. Se X ammette un rivestimento connesso non banale (cioè tale che p non è un omeomorfismo o equivalentemente tale che $\deg p > 1$), allora $\pi_1(X, x)$ non è banale.

Lezione 01/12, 8.30-10.30 aula u9-14

- Teorema generale di sollevamento: la dimostrazione si trova in [2, p. 145].
- Azioni propriamente discontinue.
- Se X è uno spazio topologico di Hausdorff e G è un gruppo finito che agisce su X in modo libero, allora l'azione è propriamente discontinua.
- Sia (X, d) uno spazio metrico e G un gruppo che agisce su X per omeomorfismi. Supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in X$ e per ogni $g \neq 1$ si abbia $d(gx, x) \geq \varepsilon$. Allora l'azione è propriamente discontinua. (Basta porre $U := B(x, \varepsilon/2)$.
- Se E è uno spazio topologico localmente connesso per archi, G è un gruppo che agisce su E in modo propriamente discontinuo e il quoziente $X := E/G$ è connesso, allora la proiezione canonica $p : E \longrightarrow X$ è un rivestimento.
- Sia E è uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Sia G un gruppo che agisce su E in modo propriamente discontinuo. Supponiamo che il quoziente $X := E/G$ sia connesso. Indichiamo con $p : E \to X$ la proiezione canonica. Fissiamo $e \in E$ e poniamo $x = p(e)$. Allora esiste un morfismo di gruppi suriettivo $\Phi : \pi_1(X, x) \to G$ tale che per ogni laccio $\alpha \in \Omega(X, x, x)$ si ha

  $$\alpha_e(1) = \Phi([\alpha]) \cdot e.$$

  Inoltre $\ker \Phi = \mathrm{Im}\big(p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(X, x)\big)$. Pertanto

  $$G \cong \frac{\pi_1(X, x)}{p_* \pi_1(E, e)}.$$

- Spazi semplicemente connessi.
- Corollario: se E è uno spazio topologico localmente connesso per archi e semplicemente connesso, G è un gruppo che agisce su E in modo propriamente discontinuo e $X := E/G$, allora per ogni $x \in X$ si ha $\pi_1(X, x) \cong G$.

Esercitazione 03/12, 13.30-15.30 aula u9-08

- Gruppo fondamentale del prodotto.
- Seifert-Van Kampen nel caso semplicemente connesso.
- S^n è semplicemente connessa per $n > 1$.
- $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \{1\}$.
- Il fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ non è banale.
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\{\pm 1\}$. L'azione di $G = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2$ su S^n è libera, dunque propriamente discontinua. $S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ è un rivestimento regolare, dunque $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2$.
- Sia $e \in S^n$, sia $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $|w| = 1$ e $w \perp e$. Allora il cammino

  $$\alpha : [0,1] \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \qquad \alpha(t) := [\cos(\pi t)e + \operatorname{sen}(\pi t)w]$$

  è un laccio e $[\alpha]$ è l'unico elemento non banale di $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), [e])$.
- Siano M ed N varietà differenziabili. Una applicazione $p : M \to N$ è un *rivestimento liscio* o *differenziabile* se è un rivestimento, è C^∞ e per ogni banalizzante $V \subset N$ ed ogni componente connessa U di $p^{-1}(V)$ la restrizione $p_{|U}$ è un diffeomorfismo di U su V.
- Supponiamo che $p : M \to N$ si un rivestimento e che sia C^∞. Allora p è un rivestimento liscio se e soltanto se è un diffeomorfismo locale.

Esercitazione 10/12: 13.30–15.30, aula 09-08

- La grassmanniana complessa e la grassmanniana reale sono varietà differenziabili.
- $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ agisce in modo continuo su $\mathrm{G}(r, \mathbb{C}^n)$ e l'azione di $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ è transitiva.
- $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ agisce in modo continuo su $\mathrm{G}(r, \mathbb{R}^n)$ e l'azione di $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ è transitiva.
- Le grassmanniane sono varietà compatte.

- Sia $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio non identicamente nullo. Allora $U := \{x \in \mathbb{C}^n : p(x) \neq 0\}$ è un aperto denso e connesso.

- La grassmanniana complessa è semplicemente connessa.

Teorema 15. *Se M ed N sono varietà differenziabili, M compatta, N connessa e $p : M \to N$ è un omeomorfismo locale, allora p è un rivestimento. Se p è un diffeomorfismo locale, allora è un rivestimento liscio.*

Dimostrazione. $p(M)$ è aperto in N perché p è aperta. Ma è anche compatto, quindi chiuso. Pertanto p è suriettiva. Le fibre di p sono chiuse e discrete perché p è un omeomorfismo locale, quindi p è localmente iniettiva. Siccome M è compatta, le fibre di p sono finite. Fissiamo $y \in N$ e sia $p^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Per ogni i scelgo un intorno aperto W_i di x_i tale che $p(W_i)$ sia aperto e $p_{|W_i}$ sia un omeomorfismo di W_i sulla sua immagine. Restringendo posso supporre che gli W_i siano a due a due disgiunti. Consideriamo l'insieme

$$A := \bigcap_{i=1}^{k} p(W_i) - p\big(M - \bigsqcup_{i=1}^{k} W_i\big).$$

L'insieme $M - \bigsqcup_{i=1}^{k} W_i)$ è chiuso dunque compatto. Pertanto $p(M - \bigsqcup_{i=1}^{k} W_i)$ è chiuso in N. Quindi A è aperto. Inoltre $p \in A$. Sia V un intorno aperto e connesso di p contenuto in A. Affermiamo che V è un banalizzante. Siccome $V \cap p(M - \bigsqcup_{i=1}^{k} W_i) = \varnothing$, si ha $p^{-1}(V) \subset \bigsqcup_{i=1}^{k} W_i$. Pertanto

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^{k} U_i$$

dove $U_i := W_i \cap p^{-1}(V)$. Siccome $U_i \subset W_i$, $p_{|U_i}$ è un omeomorfismo da U_i su $p(U_i)$. Chiaramente $p(U_i) \subset V$. Ma $V \subset p(W_i)$, dunque $p(U_i) = V$. Pertanto U_i è omeomorfo a V e in particolare è connesso. Siccome $p^{-1}(V)$ è unione degli U_i che sono connessi disgiunti, questi sono esattamente le sue componenti connesse. Abbiamo dimostrato che V è un banalizzante. Se poi p è liscia ed è un diffeomorfismo locale, serve dall'osservazione precedente che p è un rivestimento liscio. $\square$

Esercitazione 15/12, 10.30-12.30, aula u9-14

- Prodotto libero di gruppi $G_1 * G_2$. Definizione tramite la proprietà universale. Unicità a meno di isomorfismo. Costruzione tramite le parole ridotte (senza dimostrazione). Per approfondire consultare [9], [4, p. 64 sgg], [11, VIII, §3], [8, Ch. III], [7].

- Versione generale del teorema di Seifert-van Kampen. Sia X uno spazio topologico e siano $U_1, U_2 \subset X$ degli aperti connessi per archi tali che $X = U_1 \cap U_2$ e che $U_1 \cap U_2$ sia connesso per archi. Sia $x \in U_1 \cap U_2$. Siano f_i, g_i le inclusioni

$$\begin{tikzcd} & U_1 \arrow[dr, hook, "g_1"] & \\ U_1 \cap U_2 \arrow[ur, hook, "f_1"] \arrow[dr, hook, "f_2"'] & & X. \\ & U_2 \arrow[ur, hook, "g_2"'] & \end{tikzcd}$$

Per la proprietà universale del prodotto libero i morfismi $g_{i*} : \pi_1(U_i, x) \to \pi_1(X, x)$ inducono un morfismo

$$f : \pi_1(U_1, x) * \pi_1(U_2, x) \longrightarrow \pi_1(X, x).$$

Questo morfismo è suriettivo e il suo nucleo coincide con il sottogruppo normale generato dall'insieme

$$B := \{f_{1*}(a) f_{2*}(a^{-1}) : a \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x)\}.$$

A lezione si è dimostrato che il morfismo f è suriettivo e che il sottogruppo normale generato da B è contenuto in $\ker f$. L'inclusione opposta è dimostrata p.e. in [2, p. 160].

- Gruppo fondamentale del bounquet di n cerchi e del piano con n buchi.

- Se G_1 e G_2 sono gruppi abeliani, l'abelianizzato si $G_1 * G_2$ è la somma diretta $G_1 \oplus G_2$ (senza dimostrazione).

- Siano $A, B \subset \mathbb{R}^2$ due sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}^2$. Se $\mathbb{R}^2 - A$ non è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^2 - B$, allora $|A| \neq |B|$. Infatti $\pi_1(\mathbb{R}^2 - A)$ è il prodotto libero di $|A|$ copie di $\mathbb{Z}$, mentre $\pi_1(\mathbb{R}^2 - B)$ è il prodotto libero di $|B|$ copie di $\mathbb{Z}$. Se $\mathbb{R}^2 - A \simeq \mathbb{R}^2 - B$, i gruppi fondamentali dei due spazi sono isomorfi, dunque anche i loro abelianizzati sono isomorfi. Pertanto $\mathbb{Z}^{|A|} \cong \mathbb{Z}^{|B|}$ e quindi $|A| = |B|$.

- Sfera con attaccato un manico. Due sfere tangenti. Tre sfere tangenti.

Esercitazione 17/12, 13.30-15.30, aula u9-08

- Se M è una varietà differenziabile, $A \subset M$ è un aperto e $K \subset A$ è un compatto, allora esiste una funzione $\chi \in C^\infty(M)$ tale che $\mathrm{supp}(\chi)$ è un sottoinsieme compatto di A e $\chi \equiv 1$ su K. Infatti sia $A' \subset A$ un aperto contenente K e tale che $\overline{A'}$ sia compatto e contenuto in A. Sia $B := M - K$ e sia $\{\varphi_{A'}, \varphi_B\}$ una partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{A', B\}$. Basta porre $\chi := \varphi_{A'}$.

- Poniamo

$$\begin{gathered}\mathrm{Diff}_0(M) := \{f \in \mathrm{Diff}(M) : \exists Q \subset M \text{ compatto,} \\ \text{tale che } f(p) = p \text{ per ogni } p \in M - K\}.\end{gathered}$$

- Se M è una varietà differenziabile e $K \subset M$ è un compatto, e p, q sono due punti che stanno nella stessa componente connessa di $M - K$, allora esiste sempre $f \in \mathrm{Diff}_0(M)$ tale che $f(x) = x$ per ogni $x \in K$ e $f(p) = q$.

- Sia X un insieme e k un intero positivo. Sia $\Delta_k \subset X^k$ l'insieme delle k-uple $(x_1, \ldots, x_k) \in X^k$ con almeno due coordinate uguali, cioè le k-uple per le quali esistono i, j, tali che $i \neq j$ e $x_i = x_j$. Δ_k si chiama *grande diagonale*.

- Se G è un gruppo che agisce su un insieme X, allora G agisce anche su $X^k - \Delta_k$:

$$g \cdot (x_1, \ldots, x_k) := (gx_1, \ldots, gx_k).$$

  Diciamo che l'azione di G su X è k-transitiva se è transitiva l'azione di G su $X^k - \Delta_k$.

- Per ogni varietà differenziabile M e per ogni intero $k > 0$, l'azione del gruppo $\mathrm{Diff}_0(M)$ su M è *k-transitiva.*

- Quindi se $A, B \subset \mathbb{R}^2$ sono insiemi finiti, $\mathbb{R}^2 - A$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 - B$ se e solo se $|A| = |B|$.

- Per $n \geq 3$, $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, , p_k\}) = \{1\}$.

- Se X è il complementare di un cerchio in $\mathbb{R}^3$, allora $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$.

- Indichiamo con C_a un gruppo ciclico infinito (dunque isomorfo a $\mathbb{Z}$) generato da un elemento $a \in C_a$. Allora $C_a * C_b / \langle\langle ab^{-1} \rangle\rangle \cong \mathbb{Z}$.

  Dimostrazione. Sia $f : C_a * C_b \to C_c$ il morfismo tale che $f(a) = f(b) = c$. L'esistenza di f è assicurata dalla proprietà universale del prodotto libero. È evidente che f è suriettivo e che $N = \langle\langle ab^{-1} \rangle\rangle \subset \ker f$. Resta da provare l'inclusione opposta. Sia $g = a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_s} n^{n_s} \in \ker f$. Allora

  $$f(g) = c^{\sum_{i=1}^{s}(m_i + n_i)} = 1$$

  dunque $\sum_{i=1}^{s}(m_i + n_i) = 0$. Sia $\pi : C_a * C_b \to C_a * C_b/N$ la proiezione canonica. Dunque $\pi(a) = \pi(b)$ e

  $$\pi(g) = \pi(a)^{m_1} \pi(b)^{n_1} \cdots \pi(a)^{m_s} \pi(b)^{n_s} = \pi(a)^{\sum_{i=1}^{s}(m_i + n_i)} = 1.$$

  Dunque $g \in N$. □

- Esercizio 2 da [6], prima ritraendo sul toro, poi con Seifert e Van Kampen.

Esercitazione 07/01/2015, ore 13.30-15.30

- Azioni lisce di gruppi di Lie su varietà differenziabili.

Teorema 16. *Sia M una varietà differenziabile e sia G un gruppo che agisce su M in modo propriamente discontinuo e differenziabile. Se il quoziente $N := M/G$ è di Hausdorff, esso ammette una unica struttura differenziabile tale che la proiezione $\pi : M \to N$ sia un rivestimento liscio.*

Dimostrazione. Consideriamo le terne (V, U, φ) dove $V \subset N$ è un banalizzante, U è una componente connessa di $\pi^{-1}(V)$ e $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ è una carta di M. Data questa terna, costruiamo una carta di N nel modo seguente:

il dominio della carta è V e la carta è $\psi := \varphi \circ (\pi_{|U})^{-1}$. Dobbiamo provare che le carte ottenute in questo compatibili. Se (V', U', φ') è un'altra terna e $V \cap V' = \varnothing$ allora non c'è niente da dimostrare. Se invece $V \cap V'$, restringendo possiamo supporre che $V = V'$. Dunque U e U' sono due componenti connesse di $\pi^{-1}(V)$, quindi esiste un unico $g \in G$ tale che $U' = gU$ e $\pi_{|U'} \circ g = \pi_{|U}$. Dobbiamo provare che $\psi'\psi^{-1}$ è liscia, dove $\psi' := \varphi' \circ (\pi_{|U'})^{-1}$. Ma $\psi'\psi^{-1} = \varphi'(\pi_{|U'})^{-1}\pi_{|U}\varphi^{-1} = \varphi' g \varphi^{-1}$ e questa è una applicazione liscia perché g è un diffeomorfismo di M. Quindi le carte che abbiamo costruito sono compatibili e formano un atlante differenziabile di N. Se (V, U, φ) è una terna come sopra e $\psi = \varphi)\pi_{|U})^{-1}$, allora $\psi\pi\varphi^{-1}(x) = x$, dunque π è liscia ed è un diffeomorfismo locale. Pertanto è un rivestimento liscio. Vediamo che questa struttura è unica. Consideriamo su N un'altra struttura differenziabile $\mathfrak{A}'$ tale che π sia un rivestimento liscio. Dato $p \in N$, fisso una terna (V, U, φ) tale che $p \in V$ e pongo $\psi := \varphi(\pi_{|U})^{-1}$. Sia poi ψ' una carta di $\mathfrak{A}'$ vicino a p. Restringendo posso supporre che anche ψ' sia definita su V. Sempre restringendo, posso supporre che $\pi_{|U}$ sia un diffeomorfismo rispetto alla struttura $\mathfrak{A}'$ su N. Ma allora $\psi'\pi\varphi^{-1} = \psi'\psi^{-1}$ è liscia. Quindi le carte ψ' e ψ sono compatibili, per cui la struttura $\mathfrak{A}'$ coincide con quella appena definita. □

- Sia $G = \{\text{radici } m\text{-esime dell'unità}\} \cong \mathbb{Z}/m$ e siano $a_i \in \mathbb{Z}$. Consideriamo l'azione di $G \curvearrowright S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$:

  $$\zeta \cdot (z_1, \ldots, z_n) := (\zeta^{a_1} z_1, \ldots, \zeta^{a_n} z_n).$$

  Se per ogni i il peso a_i è primo con m, allora l'azione è libera, dunque propriamente discontinua. M/G è una varietà compatta e $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}/m$.

- Definizione di rivestimento universale. Se esiste è unico a meno di isomorfismo. Ogni varietà differenziabile ammette il rivestimento universale.

- Ogni applicazione $f : S^n \to T^k$ con $n > 1$ è omotopicamente banale, cioè è omotopa ad una applicazione costante.

- Ogni applicazione $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to T^k$ con $n > 1$ è omotopicamente banale.

- L'applicazione identica $\mathrm{id}_{T^n} : T^n \to T^n$ non è omotopicamente banale. Infatti supponiamo che $f = \mathrm{id}_{T^n}$ sia omotopa ad una applicazione costante $g : T^n \to T^n$, $g(x) \equiv x_0$. Se $H : f \simeq g$, poniamo $\gamma(t) := H(x,t)$. Fissiamo $x \in T^n$. Allora $g_* = \gamma_\# f_*$. Ma f_* è l'applicazione identica di $\pi_1(T^n, x)$, dunque $g_* = \gamma_\#$ sarebbe un isomorfismo. Invece $g_* : \pi_1(T^n, x) \to \pi_1(T^n, x_0)$ è il morfismo banale.

Esercitazione 12/01/2015, ore 10.30-12.30

- Alcuni esercizi sulle varietà differenziabili e i punti critici.
- L'azione di $\mathrm{Gl}(n+1, K)$ su $\mathbb{P}^m(K)$ è liscia ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$).
- Ogni applicazione liscia $f : T^2 \to S^2$ ha almeno un punto critico.
- Ogni applicazione liscia $f : S^2 \to T^2$ ha almeno un punto critico.
- Se M è una varietà compatta e $\dim M \geq k$, allora ogni applicazione liscia $f : M \to \mathbb{R}^k$ ha almeno un punto critico.

Esercitazione 14/01/2015, ore 13.30-15.30

- Ogni applicazione da $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to T^k$ è omotopa ad una applicazione costante.
- Gruppo fondamentale del toro bidimensionale meno un punto.
- Gruppo fondamentale della sfera con g manici.

Teorema 17. $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Se $(v, \theta) \in S^2 \times [0, 2\pi]$, sia $R_{v,\theta}$ la rotazione di asse v e angolo θ:

$$\begin{aligned} R_{v,\theta}(x) &= x^T + \cos\theta x^\perp + \operatorname{sen}\theta v \wedge x^\perp = \\ &= (1 - \cos\theta)\langle x, v\rangle v + \cos\theta x + \operatorname{sen}\theta v \wedge x. \end{aligned}$$

Il numero 1 è autovalore di ogni matrice $A \in \mathrm{SO}(3)$. Inoltre $R_{v,\theta} = R_{-v,-\theta}$. Quindi l'applicazione $R : S^2 \times [0, \pi] \to \mathrm{SO}(3)$ è continua e suriettiva. Le fibre non banali di R sono $S^2 \times \{0\}$ e $\{(v, \pi), (-v, \pi)\}$ per v che varia in S^2. Sia $h : S^2 \times [0, \pi] \to D^3$ la mappa $h(v, \theta) = \theta v / \pi$. Sia $f : D^3 \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ l'applicazione

$$f(y_1, \ldots, y_n) = (y_1 : \cdots, y_n : \sqrt{1 - |y|^2}). \tag{3}$$

Possiamo fattorizzare la mappa R nel modo seguente:

$$\begin{tikzcd}
S^{\times}[0,\pi] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "R"] & \\
D^3 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{SO}(3) \\
\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

La mappa $f \circ h$ è continua e suriettiva e ha esattamente le stesse fibre di R, dunque ψ è un omeomorfismo. $\square$

Teorema 18. *Ogni campo vettoriale su S^2 si annulla in qualche punto.*

Dimostrazione. Il fibrato tangente ad S^2 è

$$TS^2 = \{(x,v) \in \mathbb{R}^6 : |x| = 1, \langle x, v\rangle = 0\}.$$

Poniamo $U = \{(x,v) \in TS^2 : |v| = 1\}$. Consideriamo l'applicazione

$$g : \mathrm{SO}(3) \to U \qquad g(A) := (Ae_1, Ae_2),$$

dove $\{e_i\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$. Questa applicazione è continua e biunivoca, dunque è un omeomorfismo. Ora supponiamo per assurdo che esista un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(S^2)$ tale che $X(x) \neq 0$ per ogni $x \in S^2$. Poniamo $Y(x) := X(x)/|X(x)|$. Dunque Y è un campo vettoriale di norma 1, quindi $Y : S^2 \to U$. Poniamo anche $Z(x) := x \wedge Y(x)$. Il vettore $Z(x)$ è ortogonale a x, dunque $Z(x) \in T_xS^2$. Inoltre $|Z(x)| = 1$, quindi $Z : S^2 \to U$. Per ogni punto $x \in S^2$ i vettori $\{Y(x), Z(x)\}$ formano una base ortonormale di T_xS^2. Discende immediatamente che la funzione

$$h : S^2 \times S^1 \qquad h(x, e^{i\theta}) := \cos\theta Y(x) + \operatorname{sen}\theta Z(x),$$

è biunivoca. Siccome è continua, è un omeomorfismo. Quindi $U \cong S^2 \times S^1$. Siccome $U \cong \mathrm{SO}(3)$, otterremmo $\mathrm{SO}(3) \cong S^2 \times S^1$. Questo è assurdo perché $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}/2$ e $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume 120 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, second edition, 1986.

[2] G. E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.

[3] D. Conti. Note del corso di geometria III, anno 2013-2014. disponibili alla pagina `http://peano.matapp.unimib.it/~conti/note14.pdf`.

[4] T. W. Hungerford. *Algebra*, volume 73 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. Reprint of the 1974 original.

[5] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[6] `http://www.matapp.unimib.it/~ghigi/didattica/geo4-13-ex.pdf`

[7] M. Manetti. *Topologia*. Springer. xii, 297 p., 2008.

[8] W. S. Massey. *Algebraic topology: an introduction*. Springer-Verlag, New York, 1977. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.

[9] `http://www.matapp.unimib.it/~ghigi/didattica/prodotto-libero.pdf`

[10] F. W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.

[11] G. Zappa. *Fondamenti di teoria dei gruppi. Vol. II*, volume 18 of *Consiglio Nazionale delle Ricerche Monografie Matematiche*. Edizioni Cremonese, Rome, 1970.