Esercizi risolti di Geometria e Algebra

Fulvio Bisi, Francesco Bonsante, Sonia Brivio

Indice

Introduzione

In queste pagine proponiamo una raccolta di esercizi relativi agli argomenti trattati nel corso di Geometria ed Algebra. Nell'interesse degli studenti, gli esercizi sono stati suddivisi in capitoli seguendo l'ordine delle lezioni del corso. Accanto ad esercizi di routine, piuttosto semplici, abbiamo infine proposto alcuni esercizi con grado variabile di difficoltà destinati a studenti che abbiano acquisito ormai una certa destrezza ad operare con i concetti trattati, si veda il capitolo dedicato agli esercizi di riepilogo.

Infine, quasi tutti gli esercizi raccolti sono temi d'esame proposti agli studenti negli ultimi anni accademici, alla Facoltà di Ingegneria presso l'Università di Pavia.

Molti degli esercizi proposti sono completamente risolti; alcuni sono lasciati per esercizio, tuttavia vengono fornite le risposte ai quesiti.

In generale, le risposte riportate in colore rosso sono univoche; quelle in colore ciano sono soggette ad un certo grado di arbitrarietà. Se una risposta è riportata in colore magenta è univocamente determinata, ma dipende dalle scelte fatte in precedenza.

CAPITOLO 0

Preliminari e numeri complessi

Gli esercizi proposti in questa sezione si riferiscono alla parte introduttiva del corso. Conveniamo *per le risposte* di indicare con $\mathrm{Arg}(z)$ l'argomento principale del numero complesso z, ossia l'angolo ricondotto all'intervallo principale $(-\pi, \pi]$: ciò eliminerà alcune arbitrarietà nelle risposte, per motivi di semplicità. Al contrario, con $\arg(z)$ indicheremo un qualunque argomento del numero complesso z.

Esercizio 0.1. (27 novembre 2008, Prova in itinere)
Dato il numero complesso $w = 1 + i\sqrt{3}$, calcolare:
(a) $|w^4| =$ (b) $\mathrm{Arg}(w^4) =$ (c) $\Re(w^{-1}) =$ (d) $\Im(w^{-1}) =$

Risoluzione. Calcoliamo prima modulo e argomento di w:

$$|w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2\,, \qquad \mathrm{Arg}(w) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\,. \tag{0.1}$$

Con la formula di De Moivre, otteniamo immediatamente

$$|w^4| = |w|^4 = 2^4 = 16 \qquad \arg(w^4) = 4\arg(w) = \frac{4}{3}\pi\,, \text{ ossia } \mathrm{Arg}(w^4) = -\frac{2}{3}\pi\,. \tag{0.2}$$

Inoltre, $w^{-1} = \overline{w}/|w|^2$; abbiamo, pertanto:

$$\Re(w^{-1}) = \Re(\frac{\overline{w}}{|w|^2}) = \Re(\frac{1 - i\sqrt{3}}{|w|^2}) = \frac{1}{4}\,, \tag{0.3}$$

e

$$\Im(w^{-1}) = \Im(\frac{\overline{w}}{|w|^2}) = \Im(\frac{1 - i\sqrt{3}}{|w|^2}) = -\frac{1}{4}\sqrt{3}\,. \tag{0.4}$$

Esercizio 0.2. (30 gennaio 2008, Appello)
Determinare tutte le soluzioni nel campo complesso della seguente equazione:

$$z^3 + 2z^2 + 2z = 0.$$

RISOLUZIONE. L'equazione è un'equazione algebrica di grado 3, le cui soluzioni sono le radici del polinomio

$$p(z) = z^3 + 2z^2 + 2z. \tag{0.5}$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra, il polinomio ammette 3 radici nel campo complesso (contate con le relative molteplicità). Osserviamo che il polinomio $p(z)$ si scompone nel prodotto di due fattori:

$$p(z) = z(z^2 + 2z + 2), \tag{0.6}$$

il primo fattore lineare ci dà immediatamente la soluzione $z = 0$. Per trovare le altre soluzioni consideriamo l'equazione

$$z^2 + 2z + 2 = 0, \tag{0.7}$$

che possiamo facilmente risolvere con la ben nota formula per le equazioni di secondo grado $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

$$z_{1,2}\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

per $a \neq$; le soluzioni sono, pertanto, i numeri complessi $z_1 = -1-i$ e $z_2 = -1+i$,

---

ESERCIZIO 0.3. Fattorizzare il polinomio p dato da $p(x) = x^4 + x^3 + x + 1$ in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{C}$.

RISOLUZIONE. Osserviamo che $x = -1$ è una radice di $p(x)$, quindi possiamo dividere il polinomio per il fattore $x + 1$; per eseguire la divisione, possiamo ricorrere al metodo abbreviato di Ruffini. Riportiamo di seguito la tabella che riassume il metodo applicato al nostro caso:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & \\ -1 & & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

quindi, il polinomio si decompone in $p(x) = (x + 1) \cdot (x^3 + 1)$.

Usando i prodotti notevoli, il secondo termine viene decomposto ulteriormente; alternativamente, si può ricorrere ad una seconda divisione per $(x+1)$, visto che $x = -1$ è radice anche di $x^3 + 1$. Otteniamo:

$$p(x) = (x + 1)^2(x^2 - x + 1)\,.$$

Il secondo fattore $q(x) = x^2 - x + 1$ non ammette altre radici reali (il discriminante è $\Delta = 1 - 4 = -3$), quindi questa è la fattorizzazione massima in $\mathbb{R}$. In campo complesso, possiamo decomporre ulteriormente: infatti troviamo due radici (complesse e coniugate) per $q(x)$:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\,;$$

e possiamo scrivere, pertanto:

$$p(x) = (x+1)^2 \left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) .$$

(Lasciamo allo studente la verifica della decomposizione effettuando le moltiplicazioni).

Esercizio 0.4. Trovare le radici in $\mathbb{C}$ per il polinomio $p(x) = x^2 + 3i\,x + 4$, e usare il risultato per decomporre $p(x)$.

Risoluzione. Le radici si trovano mediante la consueta formula risolutiva per le equzioni di secondo grado:

$$x_{1,2} = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-9-16}}{2} = \frac{-3i \pm 5i}{2} ,$$

ossia $x_1 = -4i$, $x_2 = i$ (si noti che le radici **NON** sono complesse coniugate, poiché i coefficienti dell'equazioni non sono interamente in $\mathbb{R}$).

La fattorizzazione è, dunque:

$$p(x) = (x+4i) \cdot (x-i) .$$

La verifica è lasciata per esercizio

Esercizio 0.5. Trovare le radici del polinomio

$$p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

con le relative molteplicità algebriche.

Risoluzione. Poiché si osserva immediatamente che $p(1) = 0$, il polinomio ha la radice $x = 1$ e, quindi, possiamo dividere $p(x)$ per il fattore $(x-1)$ mediante il metodo semplificato di Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 \\ & & & & & \\ 1 & & 1 & 3 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

ossia:

$$p(x) = (x-1) \cdot (x^3 + 3x^2 - 4) .$$

Ancora, il polinomio si annulla per $x = 1$; eseguendo una seconda divisione otteniamo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & & & \\ 1 & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

cioè

$$p(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 4x + 4)\,.$$

La fattorizzazione è completa nel momento in cui riconosciamo nell'ultimo fattore il quadrato di un binomio:

$$p(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2)^2\,.$$

In conclusione le radici x_i con le relative molteplicità μ_i $(i = 1, 2)$ sono:

$$x_1 = 1\,, \quad \mu_1 = 2\,;$$
$$x_2 = -2\,, \quad \mu_1 = 2\,.$$

Esercizio 0.6. (21 novembre 2007, Prova in itinere)

(a) Risolvere nel campo complesso la seguente equazione: $w^4 = -1$.

(b) Utilizzando il punto precedente, risolvere l'equazione: $(z+1)^4 = -1$.

Risoluzione. (a) Osserviamo che l'equazione data è equivalente alle due seguenti equazioni relative a moduli e argomenti:

$$|w^4| = |-1| = 1, \qquad \arg(w^4) = \operatorname{Arg}(-1) + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{0.8}$$

Poiché dalla formula di De Moivre risulta $|w^4| = |w|^4$ e $\arg(w^4) = 4\arg(w)$, otteniamo:

$$|w| = 1 \qquad \arg(w) = \frac{1}{4}(\pi + 2k\pi). \tag{0.9}$$

Per i valori $k = 0, 1, 2, 3$ otteniamo rispettivamente i seguenti argomenti:

$$\arg(w_1) = \frac{1}{4}\pi \quad \arg(w_2) = \frac{3}{4}\pi \quad \arg(w_3) = \frac{5}{4}\pi \quad \arg(w_4) = \frac{7}{4}\pi, \tag{0.10}$$

osserviamo che sono distinti e che per i valori successivi di k otteniamo argomenti equivalenti a questi modulo 2π. Tali valori corrispondono alle 4 soluzioni distinte dell'equazione:

$$w_1 = 1(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad w_2 = 1(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$w_3 = 1(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \quad w_4 = 1(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Le soluzioni dell'equazione possono essere rappresentate nel piano cartesiano come i vertici di quadrato (un poligono regolare di 4 lati).

(b) Osserviamo che $z \in \mathbb{C}$ è una soluzione dell'equazione $(z+1)^4 = -1$ se e solo se $z + 1 = w$, dove w è una soluzione dell'equazione $w^4 = -1$. Quindi le soluzioni si ottengono traslando le soluzioni dell'equazione (a): $z = w - 1$. In particolare, otteniamo:

$$z_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad z_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) + i$$

$$z_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) - i \quad z_4 = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) - i.$$

Esercizio 0.7. (27 novembre 2008, Prova in itinere)
Determinare i numeri complessi z che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z^2) = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Risoluzione. La prima equazione dà direttamente il modulo dei numeri z cercati. La seconda equazione ci dice che

$$\arg(z) = \frac{1}{2}\arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{0.11}$$

Al variare di $k \in \mathbb{Z}$ otteniamo diversi argomenti, ma tutti sono equivalenti ai due argomenti principali

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \vartheta_1 = -\frac{\pi}{2}\,; \tag{0.12}$$

I numeri $z_{1,2}$ cercati perciò sono:

$$z_1 = 1\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i\,, \qquad z_2 = 1\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \tag{0.13}$$

Esercizio 0.8. (18 febbraio 2008, Appello)
Determinare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano le seguenti condizioni:

$$z + \overline{z} = 1 \qquad (z - \overline{z})^2 = -1.$$

Risoluzione. Posto $z = x + iy$, ricordiamo che risulta:

$$z + \overline{z} = 2x \quad z - \overline{z} = 2iy. \tag{0.14}$$

Le condizioni date si traducono nelle seguenti equazioni:

$$2x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}, \tag{0.15}$$

e

$$4i^2y^2 = -1 \Longrightarrow 4y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\frac{1}{2}. \tag{0.16}$$

I numeri complessi cercati sono perciò:

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 + i) \quad z_2 = \frac{1}{2}(1 - i). \tag{0.17}$$

Esercizio 0.9. (23 novembre 2009, Appello straordinario)
Determinare il numero $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$\Re(z + i) = 2 \qquad \Re(1 - iz) = -1.$$

Noto z, si calcolino:
(a) $\mathrm{Arg}(z^3) =$ (b) $|2z^{-1}| =$ (c) $\Im(z^2) =$

Risoluzione. Posto $z = x + iy$, abbiamo:

$$z + i = x + (y+1)i, \quad \Re(z+i) = x; \tag{0.18}$$

e

$$1 - iz = (1+y) - ix, \quad \Re(1-iz) = 1 + y. \tag{0.19}$$

Otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} x = 2 \\ 1 + y = -1 \end{cases}, \tag{0.20}$$

la cui soluzione è $(x, y) = (2, -2)$. Il numero complesso cercato è $z = 2 - 2i$. Calcoliamo modulo e argomento di z:

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,, \qquad \mathrm{Arg}(z) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}\,. \tag{0.21}$$

(a) Con la formula di de Moivre, otteniamo:

$$\arg(z^3) = 3\arg(z) = -\frac{3}{4}\pi. \tag{0.22}$$

Poiché risulta $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$ e $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, otteniamo:

$$|2z^{-1}| = \frac{2}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{0.23}$$

Possiamo scrivere z^2 in forma algebrica sviluppando il quadrato:

$$z^2 = 4 + 4i^2 - 8i = -8i, \quad \Im(z^2) = -8. \tag{0.24}$$

Esercizio 0.10. (4 febbraio 2009, Appello)
Si considerino i numeri complessi $z = 1 + \sqrt{3}i$ e $w = 1 + i$. Si calcolino:
(a) $|z| = 2$; (b) $\mathrm{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$; (c) $\mathrm{Arg}(z^3 w) = -\frac{3}{4}\pi$; (d) $|\frac{w^3}{z^2}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 0.11. (19 febbraio 2009, Appello)
Si consideri il numero complesso $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+3i}$. Si calcolino:
(a) $|z| = \frac{\sqrt{3}}{3}$; (b) $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{2}{3}\pi$;
(c) $z^{-1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$; (d) $z^2 = -\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Esercizio 0.12. (6 luglio 2009, Appello)
Si consideri il numero complesso $z = (1-i)^{-1}$. Si calcolino:
(a) $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$; (c) $\Re(z^{-1}) = 1$; (d) $z^2 = \frac{i}{2}$.

Esercizio 0.13. (16 settembre 2009, Appello)
Si considerino i numeri complessi $z = 1 + \sqrt{3}i$ e $w = 1 - i$. Si calcolino:
(a) $z^3 = -8$; (b) $\mathrm{Arg}(zw) = \frac{\pi}{12}$; (c) $|zw^2| = 4$; (d) $w^{-1} = \frac{1}{2}(1+i)$.

Esercizio 0.14. (14 settembre 2010,Appello)
Considerare il numero complesso $z = (2-2i)^{-3} \in \mathbb{C}$. Determinare
(a) $\mathrm{Arg}(z) = \frac{3}{4}\pi$; (b) $|z| = \frac{\sqrt{2}}{32}$; (c) $\frac{1}{z} = -16(1+i)$; (d) $z^{-2} = 512i$.

Esercizio 0.15. (11 febbraio 2010,Appello)
Considerare il numero complesso $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$. Sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $|w| = \frac{|z|}{\sqrt{2}}$, e $\mathrm{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$. Determinare
(a) $w = \sqrt{2}(1+i)$; (b) $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$;
(c) $z^3w^2 = -64\sqrt{2}i$; (d) $\Re(w^3) = -4\sqrt{2}$.

Esercizio 0.16. Decomporre in $\mathbb{R}$ i seguenti polinomi:

$$p_1(x) = x^3 - 6x^2 + 10x;$$
$$p_2(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2;$$
$$p_3(x) = x^3 - 8x^2 + 5x - 40;$$
$$p_4(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18;$$
$$p_5(x) = x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 30x^2 + 4x - 24;$$
$$p_6(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2.$$

Risposte. A meno di permutazioni dei fattori, abbiamo:

$$p_1(x) = x(x^2 - 6x + 10);$$
$$p_2(x) = 2(x+1)\cdot(x^2+1);$$
$$p_3(x) = (x-8)\cdot(x^2+5);$$
$$p_4(x) = (x-2)\cdot(x+1)\cdot(x^2+9);$$
$$p_5(x) = (x-6)\cdot(x^2+1)\cdot(x^2+4);$$
$$p_6(x) = x^2\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)$$

Esercizio 0.17. Decomporre in $\mathbb{C}$ i seguenti polinomi:

$$p_1(z) = z^3 - 6z^2 + 10z;$$
$$p_2(z) = z^5 - 6z^4 + 5z^3 - 30z^2 + 4z - 24$$
$$p_3(z) = z^4 - 3i\,z^3 - z^2 - 3i\,z - 2.$$

Risposte. A meno di permutazioni dei fattori, abbiamo:

$$p_1(z) = z(z-3-i)\cdot(z-3+i)\,;$$
$$p_2(z) = (z-6)\cdot(z-i)\cdot(z+i)\cdot(z-2i)\cdot(z+2i)\,;$$
$$p_3(z) = (z-i)^2\cdot(z+i)\cdot(z-2i)\,.$$

CAPITOLO 1

Vettori applicati in $\mathbb{E}^3_O$ e geometria nello spazio

Gli esercizi proposti in questa sezione si riferiscono allo spazio dei vettori applicati in un punto O ed alla loro applicazione nella geometria euclidea.

Esercizio 1.1. (27 novembre 2008, Prova in itinere)
Fissata la base standard $\left\{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\right\}$ di $\mathbb{E}^3_O$, sono dati i vettori: $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{k}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Determinare:

(1) Un versore $\hat{\boldsymbol{w}} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$;
(2) L'equazione cartesiana di $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$;
(3) Un vettore $\boldsymbol{n}$ ortogonale ai vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$;
(4) Un vettore $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ ortogonale al vettore $\boldsymbol{v}$;
(5) Le coordinate del vettore $\boldsymbol{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}\}$.

Risoluzione. (1) Cominciamo con lo scrivere il vettore $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$, sicuramente, $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$. Per avere un versore, basta dividere $\boldsymbol{w}$ per il suo modulo:

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|} = \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{1+1}}\,, \tag{1.1}$$

ossia,

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{k}})\,.$$

(2) Scriviamo ora una generica combinazione lineare di $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ secondo i coefficienti reali λ, μ; questo darà un vettore generico $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ (osserviamo che questo insieme è il piano passante per l'origine che contiene i due vettori):

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}\,; \tag{1.2}$$

riscriviamo la (1.2) secondo le componenti $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di $\boldsymbol{x}$, e otteniamo le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= -\lambda - \mu \\ z &= \mu \end{cases} \tag{1.3}$$

Procedendo con l'eliminazione dei parametri nell'Eq. (1.3), si ottiene l'equazione cartesiana del piano generato da $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$:

$$x + y + z = 0\,.$$

(3) L'osservazione fatta sopra, ossia che lo span dei due vettori è un piano, permette di risolvere immediatamente il quesito: infatti, un vettore $\boldsymbol{n}$ ortogonale allo span deve essere ortogonale al piano, ossia diretto come la normale al piano, quindi le sue componenti devono essere proporzionali ai coefficienti delle variabili nell'equazione del piano. Pertanto,

$$\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}\,.$$

(4) Scriviamo ora la condizione che il vettore dell'Eq. (1.3) sia ortogonale a $\boldsymbol{v}$: per fare questo, basta scrivere che il prodotto scalare fra i due vettori è nullo. Usando l'espressione per il prodotto scalare espressa tramite le componenti, otteniamo

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle = v_x\, x + v_y\, y + v_z\, z = 0 + (-1)(-\lambda - \mu) + 1\mu = \lambda + 2\mu = 0. \tag{1.4}$$

Questo esprime il legame che deve sussistere tra i due parametri; scegliendo $\mu = -1$ abbiamo:

$$\begin{cases} x & = \lambda = -2\mu = 2 \\ y & = -\lambda - \mu = -(2) - (-1) = -1 \\ z & = \mu = -1 \end{cases}, \tag{1.5}$$

che consente di scrivere

$$\boldsymbol{x} = 2\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}\,.$$

(5) Scriviamo ora il vettore $\boldsymbol{x}$ come combinazione lineare di vettori della base:

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{n} + \gamma \boldsymbol{u}\,. \tag{1.6}$$

Osserviamo, anzitutto, che $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ e $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$; nell'Eq. (1.6) è immediato, quindi, ottenere che $\beta = 0$, poiché $\boldsymbol{x}$ non può avere componente lungo $\boldsymbol{n}$. Per trovare α e γ possiamo moltiplicare scalarmente l'equazione vettoriale (1.6) per due vettori della base standard, e ottenere due equazioni scalari. Se scegliamo di proiettare lungo $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e lungo $\hat{\boldsymbol{k}}$ le equazioni si risolvono immediatamente, poiché i due vettori della nuova base sono rispettivamente ortogonali a queste direzioni:

$$\langle \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\imath}} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{\imath}} \rangle + \gamma \langle \boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{\imath}} \rangle = 0 + \beta = 2 \tag{1.7a}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{k}} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{k}} \rangle + \gamma \langle \boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{k}} \rangle = \alpha + 0 = -1\,. \tag{1.7b}$$

Pertanto, $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{u}$ e le coordinate richieste sono:

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.2. (21 novembre 2007, Prova in itinere)
Fissata la base standard $\mathcal{B} = \left\{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\right\}$ di $\mathbb{E}^3_O$, sono dati i vettori: $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{k}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Determinare:

(1) $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|$,
(2) l'angolo convesso formato dai vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$,
(3) il vettore proiezione ortogonale di $\boldsymbol{v}$ sulla retta generata da $\boldsymbol{u}$.

RISOLUZIONE. (1) Iniziamo scrivendo il vettore $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ in coordinate:

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}} \implies [\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}] = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Note le coordinate, il modulo del vettore $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ si calcola immediatamente con la formula:

$$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}. \tag{1.9}$$

(2) Indichiamo con θ l'angolo convesso formato dai vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Ricordiamo che

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = |\boldsymbol{u}|.|\boldsymbol{v}|.\cos\theta, \tag{1.10}$$

dove $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ è il prodotto scalare dei vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Calcoliamo quindi i moduli dei vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ e $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 1.0 + 1.1 + 0.1 = 1,$$
$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Inserendo i valori trovati nella formula precedente troviamo:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \tag{1.11}$$

da cui ricaviamo $\theta = \frac{1}{3}\pi$.
(3) Iniziamo col cercare un versore sulla retta r generata da $\boldsymbol{u}$, cioè un vettore appartenente a $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$ con modulo 1. Basta, ad esempio, moltiplicare il vettore $\boldsymbol{u}$ per il numero $\frac{1}{|\boldsymbol{u}|}$:

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|}\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}). \tag{1.12}$$

Il vettore proiezione ortogonale di $\boldsymbol{v}$ sulla retta r è il vettore $\boldsymbol{v}'$ dato dalla formula:

$$\boldsymbol{v}' = \langle \hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}\rangle \hat{\boldsymbol{u}}. \tag{1.13}$$

Osserviamo che, per le proprietà del prodotto scalare risulta:

$$\langle \hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

per cui otteniamo

$$\boldsymbol{v}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}) = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}). \tag{1.14}$$

ESERCIZIO 1.3. (27 novembre 2008, Prova in itinere)
Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $P_1 = (0, 1, -1)$, $P_2 = (1, 0, -1)$, e $P_3 = (0, 2, 0)$.

(1) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti P_1, P_2 e P_3:
(2) Dire quale/i fra i punti $Q_1 = (1, -1, 0)$, $Q_2 = (-1, 1, 0)$, $Q_3 = (1, 1, 0)$ e $Q_4 = (0, 0, -2)$ appartengono al piano π.

Risoluzione. (1) Il piano richiesto è il piano passante per P_1 avente giacitura $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} = \{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\}$. Cominciamo a determinare le coordinate dei due vettori:

$$[\overrightarrow{P_1P_2}] = [P_2 - P_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [\overrightarrow{P_1P_3}] = [P_3 - P_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una rappresentazione parametrica per il piano cercato è la seguente:

$$P = P_1 + \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= 1 - \lambda + \mu \\ z &= -1 + \mu \end{cases} \tag{1.15}$$

da cui, eliminando i parametri, abbiamo immediatamente per il piano π l'equazione:

$$x + y - z = 2\,. \tag{1.16}$$

(2) Basta semplicemente verificare se le coordinate dei punti soddisfano o meno l'equazione (1.16) del piano trovata. È facile convincersi che

$$Q_3, Q_4 \in \pi,$$

mentre gli altri due punti sono esterni al piano.

Esercizio 1.4. (27 novembre 2008, Prova in itinere)
Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il punto $P = (0, 2, 0)$ e la retta r di equazioni $y - z = y - x = 0$. Determinare:

(1) La direzione della retta r;
(2) L' equazione cartesiana del piano π_1 contenente la retta r ed il punto P;
(3) L'equazione cartesiana del piano π_2 ortogonale ad r e passante per P;
(4) L'angolo fra i piani π_1 e π_2;
(5) La distanza del punto P dalla retta r.

Risoluzione. (1) Le equazioni della retta r possono essere scritte come

$$x = y\,, \tag{1.17a}$$

$$z = y\,, \tag{1.17b}$$

che permettono subito di scegliere y come parametro, in altre parole, uguagliando y ad un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ scriveremo:

$$x = \lambda\,, \tag{1.18a}$$
$$y = \lambda\,, \tag{1.18b}$$
$$z = \lambda\,. \tag{1.18c}$$

Dalle Eq. (1.18) otteniamo immediatamente che la retta passa per l'origine, e un vettore che individua la sua direzione sarà $\boldsymbol{d}$:

$$[\boldsymbol{d}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

(2) L'equazione del piano π_1 avrà la forma

$$\alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z = \delta\,; \tag{1.20}$$

osserviamo che il suo vettore normale $\boldsymbol{N}$ con

$$[\boldsymbol{N}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

deve essere ortogonale a $\boldsymbol{d}$, quindi il loro prodotto scalare deve essere nullo:

$$\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{d} \rangle = \alpha + \beta + \gamma = 0\,, \tag{1.21}$$

che ci fornisce una prima condizione per i valori delle componenti di $\boldsymbol{N}$.

Imponendo che il piano passi per il punto P otteniamo:

$$\alpha\, 0 + \beta\, 2 + \gamma\, 0 = 2\beta = \delta\,; \tag{1.22}$$

osservando che il piano deve contenere la retta r, quindi anche l'origine, imponiamo $\delta = 0$ e, quindi, dall'Eq. (1.22), $\beta = 0$. Nell'Eq. (1.21) possiamo prendere, quindi, $\alpha = 1$, da cui $\gamma = -1$. L'equazione del piano risulta essere, quindi:

$$x - z = 0. \tag{1.23}$$

(3) La scrittura dell'equazione del piano π_2 è quasi immediata: imponendo il passaggio per il punto P e che il vettore $\boldsymbol{d}$ rappresenta un suo vettore normale, data la condizione imposta dal testo, abbiamo

$$1(x - 0) + 1(y - 2) + 1(z - 0) = 0\,, \tag{1.24}$$

ossia

$$x + y + z = 2.$$

(4) L'angolo fra i piani π_1 e π_2 è immediatamente determinato, senza bisogno di calcoli: poiché uno contiene la retta r e l'altro è ortogonale a questa, i due piani sono ortogonali, pertanto il loro angolo è

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

(5) Resta, infine, da determinare la distanza di P da r. Determiniamo il punto Q intersezione fra la retta r ed il piano π_2 ortogonale ad essa passante per P, di cui abbiamo determinato l'equazione (1.24); tale punto risolve il sistema

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ y - x = 0 \\ x + y + z = 2\,. \end{cases} \tag{1.25}$$

La soluzione del sistema è semplice, e fornisce $Q = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; la distanza richiesta coincide con la distanza fra P e Q:

$$d(P, Q) = \sqrt{(\frac{2}{3} -)^2 + (\frac{2}{3} - 2)^2 + (\frac{2}{3} - 0)^2}\,; \tag{1.26}$$

sviluppando i calcoli otteniamo

$$d(P, Q) = d(P, r) = 2\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Esercizio 1.5. (4 febbraio 2008, Appello)
Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il punto $A = (1, 1, 1)$ ed il piano π di equazione $x + 2y + z = 1$.

(1) Scrivere le eq. cartesiane della retta r ortogonale a π e passante per A;
(2) Scrivere l'eq. del piano τ contenente l'origine e la retta r;
(3) Scrivere l'eq. del piano σ passante per A e parallelo a π.

Risoluzione. (1) Osserviamo che la retta r è perpendicolare al piano π se e solo se ha la direzione della normale al piano. Dall'equazione del piano π ricaviamo che un vettore $\mathbf{n}$ normale al piano è:

$$\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}.$$

La retta r è quindi la retta per A di direzione $\mathbf{n}$; una sua rappresentazione parametrica è la seguente:

$$P = A + t\boldsymbol{n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Passando alle coordinate otteniamo:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t. \end{cases} \tag{1.27}$$

Per trovare una rappresentazione cartesiana della retta r cerchiamo due piani contenenti la retta, eliminando il parametro t nelle equazioni parametriche. Dalla prima e terza equazione otteniamo il piano π_1 di equazione $x - z = 0$, dalla prima e seconda equazione otteniamo il piano π_2 di equazione $y - 2x = -1$. Una coppia di equazioni cartesiane per la retta r sono le seguenti:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2x = -1. \end{cases} \tag{1.28}$$

(2) Cerchiamo ora il piano τ contenente la retta r e l'origine. Osserviamo che, contenendo l'origine, τ ha un ' equazione del tipo:

$$ax + by + cz = 0. \tag{1.29}$$

Scegliamo ora due punti distinti sulla retta r, il punto A ed il punto B corrispondente al valore $t = -1$: $B = (0, -1, 0)$. Osserviamo che se il piano τ contiene entrambi i punti A e B, allora contiene la retta r. Imponendo che il piano τ passi per A e B otteniamo le due condizioni:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a.0 + b(-1) + c.0 = 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

da cui ricaviamo $b = 0$ e $c = -a$. Poiché l'equazione del piano è individuata a meno di una costante moltiplicativa, scegliamo $a = 1$ e otteniamo quindi l' equazione del piano τ:

$$x - z = 0. \tag{1.31}$$

Si poteva rispondere immediatamente al quesito, osservando che, tra i piani contenenti la retta r trovati nel punto (1), il piano π_1 passa per l'origine, quindi coincide con il piano τ.
(3) Ricordiamo che due piani sono paralleli se e solo se hanno la stessa direzione normale. Poiché un vettore normale al piano π è il vettore $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$, il piano σ ha equazione del tipo:

$$x + 2y + z = d, \tag{1.32}$$

con $d \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per il punto A otteniamo la condizione:

$$1 + 2 + 1 = d \implies d = 6. \tag{1.33}$$

Possiamo quindi concludere che l 'equazione cartesiana del piano σ è:

$$x + 2y + z = 6. \tag{1.34}$$

Esercizio 1.6. (16 settembre 2009, Appello)
Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino la sfera Σ di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + z + 5 = 0$$

ed il piano π di equazione $x + z = 0$. Determinare:

(1) Le coordinate del centro C ed il raggio R della sfera;
(2) la distanza del centro C dal piano π;
(3) il raggio r della circonferenza γ che π taglia su Σ;
(4) il centro di γ.

Risoluzione. (1) Per determinare centro e raggio di Σ completiamo i quadrati nell'equazione di Σ:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+\frac{1}{2})^2 = 1^2 + 2^2 + \frac{1}{2}^2 - 5 = \frac{1}{4}, \tag{1.35}$$

da cui ricaviamo che Σ è la sfera avente centro nel punto $C = (1, -2, -\frac{1}{2})$ e raggio $R = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.
(2) La distanza del punto C dal piano π può essere facilmente con la formula:

$$d(C,\pi) = \frac{|1-\frac{1}{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{1.36}$$

(3) Sia γ la circonferenza tagliata dal piano π sulla sfera. Indichiamo con H il suo centro e r il suo raggio. Osserviamo che il punto H è l'intersezione del piano π con la retta per C ortogonale al piano: H è quindi la proiezione ortogonale di C sul piano. Sia P un punto qualsiasi di γ, consideriamo il triangolo rettangolo di vertici P, H e C: applicando il teorema di Pitagora otteniamo:

$$PH^2 = \sqrt{PC^2 - CH^2} = \sqrt{R^2 - d(C,\pi)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \tag{1.37}$$

quindi possiamo concludere che $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
(4) Il centro H di γ si ottiene intersecando la retta per C ortogonale al piano con il piano stesso. Una rappresentazione parametrica della retta per C ortogonale al piano è la seguente:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = -\frac{1}{2} + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.38}$$

Cerchiamo il punto della retta che appartiene al piano π:

$$(1+t) + (-\frac{1}{2} + t) = 0 \implies t = -\frac{1}{4}. \tag{1.39}$$

Il punto H è il punto sulla retta che corrisponde al valore $t = -\frac{1}{4}$:

$$H = (\frac{3}{4}, -2, -\frac{1}{4}).$$

Esercizio 1.7. (19 febbraio 2009, Appello)
Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il punto $P = (1, -1, -1)$ ed i vettori $\boldsymbol{u} = 2\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}}$.

(1) Scrivere l'equazione del piano $\pi = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$:
$\pi\colon\ x - 2y + z = 0.$
(2) Calcolare la distanza δ di P da π:
$\delta = \frac{2}{\sqrt{6}}$.
(3) Scrivere le coordinate del punto H, proiezione ortogonale di P sul piano π:
$H = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.
(4) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per l'origine O del riferimento e per il punto H:
$r\colon \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$.

(5) Scrivere l'equazione del piano che contiene P ed r:
$3x + 2y + z = 0$.

Esercizio 1.8. (6 luglio 2009, Appello)
Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino la retta r di equazioni $x = y$ e $z - 2y = 0$ ed il punto $P = (1, 1, h)$.

(1) Scrivere l' equazione del piano π passante per l'origine e ortogonale a r:
$\pi\colon\ x + y + 2z = 0$.
(2) Determinare i valori del parametro h per i quali $P \in \pi$:
$P \in \pi \implies h = -1$.
(3) Trovare i punti sulla retta r distanti $\sqrt{6}$ dal piano π:
$P_1 = (1, 1, 2)$, $P_2 = (-1, -1, -2)$.

Esercizio 1.9. (16 settembre 2009, Appello)
Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, h, 2)$.

(1) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B:
$$r\colon\ \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$
(2) Stabilire per quale/i valori del parametro reale h i punti A, B e C sono allineati:
i punti sono allineati se e solo se $\quad h = -1$
(3) Posto $h = 2$, scrivere l'equazione cartesiana del piano π per i tre punti:
$$\pi\colon\ x = 1$$

Esercizio 1.10. (23 novembre 2009, Appello straordinario)
Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (1, 1, 1)$ e $B = (2, -1, 3)$.

(1) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per O e perpendicolare alla retta $r = AB$.
$$\pi\colon x - 2y + 2z = 0\,.$$
(2) Calcolare le distanze fra A e B, fra A e π, fra B e π:
$$d(A, B) = 3, \quad d(A, \pi) = \frac{1}{3}, \quad d(B, \pi) = \frac{10}{3}\,.$$
(3) Calcolare la distanza fra O e la retta r:
$$d(O, r) = \frac{\sqrt{26}}{3}\,.$$

Esercizio 1.11. (14 febbraio 2010, Appello)
Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, e $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B:

$$r\colon \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

(2) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s passante per P e avente direzione $\boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$:

$$s\colon \begin{cases} x + z = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

(3) Precisare la posizione reciproca delle rette r ed s:
rette SGHEMBE.

(4) Scrivere l'equazione del piano π che contiene A, B, e P:

$$\pi\colon x - 3y + 2z + 3 = 0.$$

(5) Calcolare la distanza dell'origine O del riferimento da π:

$$d(O, \pi) = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Esercizio 1.12. (14 settembre 2010, Appello)
Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = (0, 2, 1)$, $B = (2, 0, -1)$.

(1) Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per A e B:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(2) Determinare in forma cartesiana il piano π passante per l'origine $O = (0, 0, 0)$ ed ortogonale a r:

$$\pi\colon x - y - z = 0.$$

(3) Determinare il punto H di intersezione fra r e π:

$$H = (1, 1, 0).$$

(4) Determinare in forma cartesiana le equazioni della retta s passante per O e H:

$$s\colon \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases} .$$

CAPITOLO 2

Spazi vettoriali

Gli esercizi proposti in questa sezione si riferiscono alle proprietà di spazi vettoriali reali.

Esercizio 2.1. Considerati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y = z = 0 \right\} \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 0 \right\}$$

determinare:

(1) la dimensione ed una base di U e V;
(2) il sottospazio $U \cap V$;
(3) la sommma $U + V$ di U e V è diretta?

Risoluzione. (1) Le equazioni che definiscono gli elementi di U sono 2, e sono indipendenti. Scriviamole in forma parametrica; per fare questo, osserviamo che la coordinata z è fissata: $z = 0$. Scrivendo la prima equazione cartesiana nella forma $x = y$ risulta naturale scegliere come parametro una qualunque delle due coordinate:

$$x = \lambda\,, \tag{2.1a}$$
$$y = \lambda\,, \tag{2.1b}$$
$$z = 0\,, \tag{2.1c}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Essendoci un solo parametro libero, $\dim(U) = 1$. Per avere una base $\mathcal{B}_U$ di U, basta prendere $\lambda = 1$: il vettore ottenuto genera U.

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Per V, z è libera; inoltre, $y = -x$: le equazioni parametriche sono:

$$x = \lambda\,, \tag{2.2a}$$
$$y = -\lambda\,, \tag{2.2b}$$
$$z = \mu\,, \tag{2.2c}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Con due parametri liberi, abbiamo $\dim(V) = 2$. Per avere una base $\mathcal{B}_V$ di V, basta prendere $\lambda = 1$ e $\mu = 0$, e poi $\lambda = 0$ e $\mu = 1$: i vettori ottenuti sono indipendenti, e quindi generano V

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

(2) Per determianre i vettori dello spazio intersezione, dobbiamo trovare le coordinate che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x - y & = 0 \\ z & = 0 \\ x + y & = 0 \end{cases} . \tag{2.3}$$

Sommando e sottraendo membro a membro la prima e l'ultima otteniamo

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ z & = 0 \\ 2y & = 0 \end{cases} , \tag{2.4}$$

cioè $x = y = z = 0$. Solo il vettore nullo si trova nell'intersezione: $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

(3) La formula di Grassmann garantisce che

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U + V) + \dim(U \cap V) ;$$

siccome $\dim U = 1$, $\dim V = 2$ e $\dim(U \cap V) = 0$, risulta $\dim(U+V) = 1+2 = 3$.

Ossia, $U + V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3; ma $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, quindi $U + V = \mathbb{R}^3$. La somma è diretta, poiché $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, possiamo quindi scrivere

$$U \oplus V = \mathbb{R}^3. \tag{2.5}$$

Esercizio 2.2. Sia $\boldsymbol{u}$ un vettore non nullo di $\mathbb{E}^3_O$, si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{E}^3_O$:

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{E}^3_O \,|\, \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u} \right\}$$

(1) Verificare che V è un sottospazio di $\mathbb{E}^3_O$;
(2) Posto $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$:
  (a) determinare una base $\mathcal{B}$ di V;
  (b) scrivere il vettore $\boldsymbol{w} \in \mathbb{E}^3_O$ che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$ trovata;
  (c) trovare un sottospazio complementare di V.

Risoluzione. (1) Due vettori applicati in O sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è 0. Risulta quindi:

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{E}^3_O \,|\, \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = 0 \right\} . \tag{2.6}$$

Verifichiamo che V è chiuso rispetto alla somma. Siano $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ due vettori di V, si ha:

$$\langle \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u} \rangle = 0 + 0 = 0, \tag{2.7}$$

quindi $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V$.

Verifichiamo che V è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare. Siano $\boldsymbol{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\langle \alpha\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = \alpha.0 = 0, \tag{2.8}$$

quindi $\alpha\boldsymbol{v} \in V$.
(2) Posto $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$, se $\boldsymbol{v} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$ risulta:

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = x + y + z, \tag{2.9}$$

otteniamo quindi la descrizione seguente per V:

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{E}^3_O, [\boldsymbol{v}] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}. \tag{2.10}$$

(a) Una base per il sottospazio V è data dai vettori seguenti:

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \quad [\boldsymbol{v}_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad [\boldsymbol{v}_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

quindi $\dim V = 2$.
(b) Il vettore $\boldsymbol{w} \in V$ che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$ di V è il vettore seguente:

$$\boldsymbol{w} = 1\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 = (\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{k}}) + 2(\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}) = \hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 3\hat{\boldsymbol{k}}. \tag{2.12}$$

(c) Un sottospazio U è complementare di V se risulta $U \oplus V = \mathbb{E}^3_O$. Poiché la somma è diretta per la formula di Grassmann si ha:

$$\dim U + \dim V = \dim \mathbb{E}^3_O = 3,$$

da cui ricaviamo subito che $\dim U = 1$. Basta quindi cercare un vettore in $\mathbb{E}^3_O$ che non appartiene a V: ad esempio il vettore $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ non appartiene a V, infatti $1 + 1 + 1 \neq 0$. Il sottospazio $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$ soddisfa la condizione $U \cap V = \{\boldsymbol{0}\}$, quindi la somma è diretta e si ha $\dim(U \oplus V) = 3$. Poiché $U \oplus V \subset \mathbb{E}^3_O$, necessariamente $U \oplus V = \mathbb{E}^3_O$. Un sottospazio conplementare di V è quindi $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$.

Esercizio 2.3. Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y = 0 \right\} \qquad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - t = z = 0 \right\}$$

determinare:

(1) la dimensione ed una base di U e V;
(2) la dimensione ed una base di $U + V$ e $U \cap V$;
(3) U e V sono in somma diretta?

Risoluzione. (1) Una sola equazione definisce gli elementi di U. Scriviamola in forma parametrica; per fare questo, osserviamo che le coordinate z e t sono libere; scrivendo l'equazione cartesiana nella forma $x = y$ risulta naturale scegliere come parametro una qualunque delle due coordinate:

$$x = \lambda\,, \tag{2.13a}$$
$$y = \lambda\,, \tag{2.13b}$$
$$z = \mu\,, \tag{2.13c}$$
$$t = \nu\,, \tag{2.13d}$$

con $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Essendoci tre parametri liberi, $\dim(U) = 3$. Per avere una base $\mathcal{B}_U$ di U, basta prendere un parametro di valore unitario, e gli altri due nulli: i 3 vettori ottenuti generano U.

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Come conseguenza, abbiamo, chiaramente, $\dim(U) = 3$.

Per V, y è libera; inoltre, $x = t$, e $z = 0$. Le equazioni parametriche che definiscono l'insieme sono:

$$x = \lambda\,, \tag{2.14a}$$
$$y = \mu\,, \tag{2.14b}$$
$$z = 0\,, \tag{2.14c}$$
$$t = \lambda\,, \tag{2.14d}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Con due parametri liberi, abbiamo $\dim(V) = 2$. Per avere una base $\mathcal{B}_V$ di V, basta prendere $\lambda = 1$ e $\mu = 0$, e poi $\lambda = 0$ e $\mu = 1$: i vettori ottenuti sono indipendenti, e quindi generano V

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Per determinare i vettori di $U \cap V$, dobbiamo trovare le coordinate che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ z &= 0 \\ x - t &= 0 \end{cases}. \tag{2.15}$$

Le tre equazioni sono, banalmente, indipendenti; prendendo come parametro libero la variabile x, abbiamo le seguenti equazioni parametriche, dipendenti da un solo parametro:

(2.16a) $$x = \lambda\,,$$

(2.16b) $$y = \lambda\,,$$

(2.16c) $$z = 0\,,$$

(2.16d) $$t = \lambda\,;$$

si ha, quindi, $\dim(U \cap V) = 1$, e una sua base è costituita dal vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La formula di Grassmann garantisce che

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)\,;$$

siccome $\dim(U \cap V) = 1$, $\dim(U + V) = 3 + 2 - 1 = 4$; ossia, $U + V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 4; ma $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, quindi $U + V = \mathbb{R}^4$. Per convincersi di ciò, osserviamo che $U + V$ è generato da

$$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

gli ultimi 4 vettori sono linearmente indipendenti, e permettono di scrivere ogni vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ come loro combinazione lineare. Come si può verificare facilmente, si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (t - x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) La somma non è diretta, perché $\dim(U \cap V) = 1 \neq 0$.

ESERCIZIO 2.4. (27 novembre 2008, Prova in itinere)
Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \colon \quad x + y = t = 0 \right\} \qquad V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(1) Determinare una base per U;
(2) determinare un sistema di generatori per $U + V$;
(3) calcolare le dimensioni di $U \cap V$ e $U + V$.

Risoluzione. (1) Scriviamo in forma parametrica le equazioni che definiscono il sottospazio U; per fare questo, osserviamo che la coordinata z è completamente libera. Scrivendo la prima equazione cartesiana nella forma $y = -x$ risulta naturale scegliere come parametro una qualunque delle due coordinate:

$$x = \lambda\,, \tag{2.17a}$$
$$y = -\lambda\,, \tag{2.17b}$$
$$z = \mu\,, \tag{2.17c}$$
$$t = 0\,, \tag{2.17d}$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La dimensione di U è dunque 2, come il numero di parametri liberi. Scegliendo $\lambda = 1, \mu = 0$ e $\lambda = 0, \mu = 1$ otteniamo due vettori linearmente indipendenti che possono essere usati come base. Perciò una base di U è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.18}$$

(2) Per avere un sistema di generatori di $U + V$ basta unire i vettori della base di U con i generatori di V, che sono noti per la definizione di V come span di un insieme di vettori. Possiamo scrivere per questo sistema

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.19}$$

Notando che il primo e l'ultimo vettore sono banalmente linearmente dipendenti (uno l'opposto dell'altro), ne terremo uno solo. Quindi il sistema

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\} \tag{2.20}$$

non solo genera $U + V$ come il precedente, ma è anche una sua base, visto che i tre vettori rimasti sono linearmente indipendenti, come è facile verificare.
(3) Allora abbiamo in modo immediato che

$$\dim(U + V) = 3\,;$$

la formula di Grassmann ci dà

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)\,,$$

e, poiché $\dim(U) = \dim(V) = 2$, abbiamo

$$\dim(U \cap V) = 1\,.$$

Esercizio 2.5. (21 novembre 2007, Prova in itinere)
Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che i vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ sono una base $\mathcal{B}$ per $\mathbb{R}^2$;
(2) determinare le coordinate del vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Risoluzione. (1) Osserviamo che che i vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ sono linearmente indipendenti, infatti il vettore $\boldsymbol{u}_2 \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1)$. Il sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ ha quindi dimensione 2, essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ coincide con esso. I vettori sono quindi una base di $\mathbb{R}^2$.
(2) Vogliamo scrivere il vettore $\boldsymbol{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$:

$$\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Abbiamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} 1 = \alpha + 2\beta \\ 1 = 2\alpha + \beta \end{cases} \tag{2.22}$$

risolvendo il quale troviamo $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. Le coordinate del vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono le seguenti:

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Esercizio 2.6. (21 novembre 2007, Prova in itinere)
Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z = z + t = 0 \right\}.$$

(1) Determinare una base per U;
(2) completare la base trovata ad una base di $\mathbb{R}^4$;
(3) costruire un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Risoluzione. (1) Scriviamo in forma parametrica le equazioni che definiscono il sottospazio U: dalla seconda equazione otteniamo $t = -z$ e dalla prima equazione $y = -2x - z$. Possiamo scegliere come parametro x e z, ottenendo la seguente rappresentazione dei vettori di U:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda - \mu \\ z = \mu \\ t = -\mu, \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.24}$$

Abbiamo trovato due vettori di U che sono generatori, inoltre è immediato verificare che sono linearmente indipendenti, quindi sono una base di U:

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.25}$$

(2) Vogliamo trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene i vettori di $\mathcal{B}_U$. Per semplicità poniamo:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

A tale scopo aggiungiamo ai vettori dati un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$, ad esempio i vettori della base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$:

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}, \tag{2.27}$$

abbiamo in tal modo ancora un sistema di generatori per lo spazio $\mathbb{R}^4$. Applichiamo ora l'algoritmo di estrazione della base a tale sistema di generatori. Osserviamo che i vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ sono linearmente indipendenti, quindi non vengono eliminati. É immediato osservare che il vettore $\boldsymbol{e}_1$ non appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, quindi $\boldsymbol{e}_1$ non viene eliminato. Vediamo ora se il vettore $\boldsymbol{e}_2 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{e}_1)$: osserviamo che risulta $\boldsymbol{e}_2 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{e}_1)$, quindi il vettore $\boldsymbol{e}_2$ viene eliminato. Infine si verifica facilmente che il vettore $\boldsymbol{e}_3$ non appartiene al sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{e}_1)$. Possiamo quindi concludere che i vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$ sono una base di $\mathbb{R}^4$. Una risposta al quesito è la seguente:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.28}$$

(3) Ricordiamo che un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ che soddisfa la condizione $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ è un sottospazio complementare di U. La somma di U e V è diretta se e solo se $U \cap V = \{\boldsymbol{0}\}$, in tal caso dalla formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim U + \dim V = \dim(U \oplus V) = \dim \mathbb{R}^4 = 4, \implies \dim V = 2. \tag{2.29}$$

Ricordiamo inoltre che, poiché la somma è diretta, l'unione di una base di U e di una base di V costituisce una base per lo spazio somma, in questo caso una base per $\mathbb{R}^4$. Basta quindi cercare due vettori linearmente indipendenti $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ in $\mathbb{R}^4$ tali che l'unione $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$. Una coppia di vettori che soddisfa tale richiesta è stata trovata nel punto (2): i vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_3$. Un sottospazio complementare di U è quindi il seguente:

$$V = \mathrm{Span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3). \tag{2.30}$$

Esercizio 2.7. (28 giugno 2010, Appello)
Determinare quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi, giustificando ogni affermazione. In caso affermativo, determinare una base e dimensione del sottospazio.

(1) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x - y = 2z = 1 \right\}$.

(2) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \right\}$.

(3) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; xy = z = 0 \right\}$.

Risoluzione.

(1) U_1 non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Infatti il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_1$, poiché si ha $2z = 0 \neq 1$.
(2) U_2 è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Verifichiamo che U_2 è chiuso rispetto alla somma.
Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U_2$, osserviamo che:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Poiché i vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ appartengono a U_2, risulta:

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = (x_1 + 2y_1 + 3z_1) + (x_2 + 2y_2 + 3z_2) = 0 + 0 = 0,$$

quindi $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in U_2$.
Verifichiamo che U_2 è chiuso rispetto al prodotto per un numero reale. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\boldsymbol{u} \in U_2$ si ha:

$$(\alpha x) + 2(\alpha y) + 3(\alpha z) = \alpha(x + 2y + 3z) = \alpha.0 = 0,$$

quindi $\alpha\boldsymbol{u} \in U_2$. Infine, osserviamo che $\dim U = 2$: una base per U_2 è la seguente:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.32}$$

(3) U_3 non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Infatti si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3$$

ma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3$$

poiché $xy = 1 \neq 0$.

ESERCIZIO 2.8. (9 Aprile 2010, Appello Straordinario)
Si consideri il sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione:

$$x + 2y - z + t = 0.$$

(1) Trovare una base $\mathcal{B}$ per V:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Sia $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, determinare per quali valori di h risulta $\boldsymbol{w} \in V$:

$$h = -1.$$

(3) Per il valore di h trovato, scrivere le coordinate di $\boldsymbol{w}$ nella base $\mathcal{B}$:

$$[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 2.9. (16 settembre 2008, Appello)
Fissati in $\mathbb{R}^4$ i vettori: $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si considerino i sottospazi:

$$U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}); \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + 2t = y + z = 0 \right\}.$$

(1) Determinare una base di U e una base di V:

$$\mathcal{B}_U = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \quad \mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene ad U? Perché?

SI, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$.

(3) Il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene ad V? Perché?

NO, non soddisfa la prima equazione di V: $-1 + 2(t) \neq 0$.

(4) Determinare le dimensioni di $U \cap V$ e $U + V$:

$$\dim(U \cap V) = 1 \quad \dim(U + V) = 3.$$

Esercizio 2.10. (3 luglio 2008, Appello)

Fissati in $\mathbb{R}^4$ i vettori: $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, si considerino i sottospazi:

$$U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \quad W = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | t = 0 \right\}.$$

Determinare:

(1) Le dimensioni dei sottospazi U, W e V:

$$\dim U = 1 \quad \dim W = 2 \quad \dim V = 3.$$

(2) Le equazioni cartesiane del sottospazio W:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases}.$$

(3) U è un sottospazio di W? E di V? Perché?

SI, U è sottospazio di W, perché il vettore $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ appartiene a W. Inoltre il vettore $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ soddisfa l'equazione di V, quindi U è sottospazio di V. .

(4) Stabilire se è vera l'uguaglianza $U = V \cap W$:

Poiché U è sottospazio di W e V, allora $U \subset W \cap V$. Non può essere $\dim(W \cap V) = 2$ perché si avrebbe $W \cap V = W$, ma W non è sottospazio di V: $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ non appartengono a V. Possiamo concludere, pertanto, che $\dim(W \cap V) = 1$ e quindi $W \cap V = U$.

CAPITOLO 3

Matrici, determinante e rango

Gli esercizi proposti in questa sezione si riferiscono alle proprietà delle matrici, al calcolo di rango e determinante.

Esercizio 3.1. (21 novembre 2007, Prova in itinere)
Si considerino le seguenti matrici reali quadrate di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare:

(1) $|A^2|$;
(2) $|2A|$;
(3) $|AB|$;
(4) $|A - B|$.

Risoluzione. Iniziamo a calcolare i determinanti delle matrici A e B, utilizzando la regola di Laplace, sviluppando sulla terza colonna per A e sulla seconda riga per B, otteniamo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3. \tag{3.1}$$

(1) Applicando la regola di Binet, risulta:

$$|A^2| = |A|^2 = (-1)^2 = 1. \tag{3.2}$$

(2) Applicando la proprietà di linearità del determinante sulle colonne, otteniamo:

$$|2A| = (2)^3|A| = 8 \cdot (-1) = -8. \tag{3.3}$$

(3) Applicando di nuovo la regola di Binet, risulta:

$$|A.B| = |A|.|B| = (-1)(3) = -3. \tag{3.4}$$

(4) Ricordiamo che in generale $|A - B| \neq |A| - |B|$, per rispondere al quesito determiniamo la matrice $A - B$:

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -102 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

osserviamo che le righe della matrice trovata sono linearmente dipendenti (infatti, $(A-B)_3 = 2(A-B)_2$), quindi la matrice ha determinante nullo:

$$|A - B| = 0.$$

Esercizio 3.2. (27 novembre 2008, Prova in itinere)
Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4, al variare del parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-h & 0 \\ 1 & 1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, al variare di h, $|A|$;
(2) determinare per quali valori di h la matrice A è non invertibile:
(3) determinare per quali valori di h le righe di A sono vettori linearmente indipendenti:
(4) determinare per quali valori di h la matrice ha rango 2:
(5) posto $h = -1$, calcolare $|A^5|$ e $|-4A|$.

Risoluzione. (1) La matrice è triangolare; il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale; in funzione di h abbiamo

$$\det(A) = h^2(1-h). \tag{3.6}$$

(2) La matrice è non invertibile se e solo se il suo determinante è nullo; dall'Eq. (3.6), uguagliando il determinante a 0, otteniamo che la condizione è

$$h = 1 \lor h = 0.$$

(3) I vettori riga di A sono linearmente indipendenti se il rango è massimo, ossia se il determinante non è nullo; quindi, nella situazione complementare rispetto al punto precedente:

$$h \neq 1 \land h \neq 0.$$

(4) Per avere rango 2, la matrice non deve avere rango massimo, ossia, $\det(A) = 0$. Gli unici valori da esplorare sono, quindi $h = 1 \lor h = 0$.

Per $h = 0$, la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.7}$$

nella matrice (3.7), osserviamo che la terza e la quarta riga coincidono, la prima è nulla, e la seconda è sicuramente indipendente dalla terza. Possiamo, dunque, dire che il rango in questo caso è 2.

Invece, per $h = 1$, la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.8}$$

nella matrice (3.8), stavolta la seconda e la terza riga coincidono, ma la prima, seconda e quarta righe sono linearmente indipendenti. Il rango in questo caso è 3. Pertanto, il rango è 2 per
$$h = 0.$$

(5) Posto $h = -1$, dall'Eq. (3.6) abbiamo
$$\det(A) = 2\,; \tag{3.9}$$
quindi, usando le regole per il calcolo dei determinanti:
$$|A^5| = |A|^5 = 2^5 = 32\,,$$
e
$$|-4A| = (-4)^4 \cdot |A| = (-4)^4 \cdot 2 = 512\,.$$

Esercizio 3.3. (11 febbraio 2010, Appello)
In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti vettori dipendenti da un parametro $h \in \mathbb{R}$
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ h^2 \\ h \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ h^2 \\ -h \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Determinare per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$:

(1) i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ sono linearmente *indipendenti*;
(2) il vettore $\boldsymbol{v}_4$ appartiene allo $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$.

Risoluzione. (1) I vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) \subset \mathbb{R}^4$ ha dimensione 4, se e solo se la matrice seguente
$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ h^2 & 1 & h^2 & 1 \\ h & 1 & -h & 1 \end{pmatrix}$$
ha rango 4. Calcoliamo il determinante di A:
$$|A| = \begin{vmatrix} h & 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ h^2 & 1 & h^2 & 1 \\ h & 1 & -h & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & h & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h^2 & 1 \\ 2h & 1 & -h & 1 \end{vmatrix} = 2h \begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & h^2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2h \begin{vmatrix} 0 & h & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & h^2 & 1 \end{vmatrix} = -2h(h - h^2) = -2h^2(1 - h).$$
Osserviamo che $|A| = 0$ se e solo se $h = 0$ o $h = 1$. Pertanto la matrice ha rango 4 per ogni $h \neq 0$ e $h \neq 1$. Possiamo concludere che i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ e $\boldsymbol{v}_4$ sono linearmente indipendenti se e solo se $h \neq 0$ e $h \neq 1$.
(2) Osserviamo che se $\boldsymbol{v}_4$ è combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$, i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ sono necessariamente linearmente dipendenti. Quindi per il

punto (1), risulta $h = 0$ oppure $h = 1$. Analizziamo i due casi separatamente. Sia $h = 0$, la matrice A diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

poiché $A_1 = A_3 = A_4$ e A_1, A_2 sono linearmente indipendenti, si ha $\mathrm{rg}(A) = 2$. Quindi

$$\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = \mathrm{rg}(A) = 2.$$

Una base per tale spazio è $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, e $\boldsymbol{v}_3 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.
Sia $h = 1$, la matrice A diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

risulta $\mathrm{rg}(A) = 3$, infatti si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Quindi

$$\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = \mathrm{rg}(A) = 3,$$

una base per il sottospazio è $\{\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$. Poiché si ha $A^1 = A^2$, possiamo concludere che:

$$\boldsymbol{v}_4 \notin \mathrm{Span}(A^1, A^2, A^3) = \mathrm{Span}(A^2, A^3).$$

Cocludendo la risposta al quesito (2) è la seguente: $\boldsymbol{v}_4$ appartiene allo $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ se e solo se $h = 0$.

Esercizio 3.4. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \\ h \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

con h parametro reale. Siano $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ e $W = \mathrm{Span}(\boldsymbol{w})$.

(1) Calcolare al variare di h la dimensione del sottospazio U;
(2) stabilire per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{w} \in U$;
(3) stabilire per quali valori di h i sottospazi U e W sono in somma diretta;
(4) stabilire per quali valori del parametro h il sottospazio W è complementare di U.

Risoluzione. (1) Traduciamo il problema dato in uno relativo al calcolo del rango di matrici. Consideriamo la matrice A di colonne $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

abbiamo allora:

$$\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = \dim U.$$

Procediamo quindi nel calcolo del rango: la matrice A è non nulla di tipo 4×3, quindi abbiamo $1 \leq \operatorname{rg}(A) \leq 3$. Osserviamo subito che se $h = 0$, la terza colonna di A è nulla, le prime due colonne sono però linearmente indipendenti:

$$h = 0 \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi per $h = 0$ risulta $\operatorname{rg}(A) = \dim U = 2$.
Se $h \neq 0$, il seguente minore di ordine 2 è non nullo:

$$\delta = \begin{vmatrix} h & 0 \\ 1 & h \end{vmatrix} = h^2,$$

per la regola di Kronecker, è sufficiente controllare i due minori di ordine 3 che si ottengono orlando δ:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} h & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 \\ -1 & 1 & h \end{vmatrix}.$$

Osserviamo che $\Delta_1 = h^3 \neq 0$ per ogni $h \neq 0$, per cui risulta $\operatorname{rg}(A) = \dim U = 3$.
Riassumendo abbiamo:

$$\dim U = \begin{cases} 2 & h = 0 \\ 3 & h \neq 0 \end{cases}.$$

(2) Osserviamo che se il vettore $\boldsymbol{w} \in U$ i vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}\}$ sono linearmente dipendenti. Introduciamo la matrice B le cui colonne sono i vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}$:

$$B = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h & 1 \\ -1 & 1 & h & 2 \end{pmatrix},$$

poiché la matrice B è quadrata, calcoliamo il suo determinante:

$$|B| = h \begin{vmatrix} h & 0 & 1 \\ 0 & h & 1 \\ 1 & h & 2 \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} h & 0 & 1 \\ 0 & h & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -h^2(h-1).$$

Osserviamo che se $h \neq 0$ e $h \neq 1$, risulta $\operatorname{rg}(B) = 4$, quindi i vettori sono linearmente indipendenti. I vettori sono linearmente dipendenti per $h = 0$ o

$h = 1$. Analizziamo in dettaglio i due casi. Se $h = 0$, da (1) abbiamo che $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, tuttavia è immediato verificare che $\boldsymbol{w}$ non appartiene ad U: i vettori di U hanno tutti la terza entrata nulla e $\boldsymbol{w}$ non soddisfa questa condizione. Per $h = 1$, da (1) abbiamo che $\dim U = 3$, quindi i tre vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ sono linearmente indipendenti e $\boldsymbol{w}$ è una loro combinazione lineare. La risposta al quesito è quindi:
solo per $h = 1$ il vettore $\boldsymbol{w} \in U$.
(3) Ricordiamo che i sottospazi U e W sono in somma diretta se solo se risulta $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Osserviamo che W è un sottospazio di dimensione 1 e l'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio di W. Quindi si possono verificare solo i seguenti casi:
o $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ oppure $U \cap W = W$ e quindi $\boldsymbol{w} \in U$.
Possiamo quindi concludere che la somma è diretta se e solo se $\boldsymbol{w} \notin U$, dal quesito (2) ciò si verifica per ogni $h \neq 1$. La risposta è quindi:
la somma è diretta per ogni $h \neq 1$.
(4) Ricordiamo che W è complementare di U se $U \oplus W = \mathbb{R}^4$: la somma dei sottospazi è diretta e $\dim U + \dim W = \dim \mathbb{R}^4 = 4$. La prima condizione è verificata per ogni $h \neq 1$ (quesito (3)). La seconda condizione è verificata se e solo se si ha $\dim U = 3$, per (1), se e solo se $h \neq 0$. Concludendo:
W è complementare di U per ogni $h \neq 0$ e $h \neq 1$.

Esercizio 3.5. Si consideri la seguente matrice dipendente dal parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & h+1 \\ 2h & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h^2 & h-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare al variare di h il rango della matrice A.

Risoluzione. Osserviamo che la matrice data è una matrice non nulla di tipo 4×3, il suo rango non è 0 e non può superare 3, pertanto avremo

$$1 \leq \mathrm{rg}(A) \leq 3.$$

Per calcolare il rango della matrice seguiamo il metodo di Kronecker. Partiamo quindi considerando il seguente minore di ordine 2:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & h+1 \\ 1 & h \end{vmatrix} = h - (h+1) = -1 \neq 0. \tag{3.10}$$

Tale minore è non nullo per ogni h, è sufficiente quindi controllare i minori di ordine 3 che si ottengono orlando δ, cioè aggiungendo una riga ed una colonna alle righe e colonne usate per calcolare δ. In questo caso abbiamo due minori:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h & 1 & h+1 \\ 2h & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & h \end{vmatrix} = h(h^2 - h + 2),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} h & 1 & h+1 \\ 0 & 1 & h \\ h^2 & h-1 & 0 \end{vmatrix} = -h^3.$$

Ricordiamo che la matrice ha rango 2 s ee solo se entrambi i minori scritti sono nulli: $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Osserviamo che il sistema

$$\begin{cases} h(h^2 - h + 2) = 0 \\ h^3 = 0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione $h = 0$. Possiamo quindi concludere che risulta:

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 2 & h = 0 \\ 3 & \forall h \neq 0 \end{cases}.$$

Esercizio 3.6. (20 gennaio 2011, Appello)
Sia $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2. Si consideri il sottoinsieme delle matrici reali simmetriche:

$$U = \{A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) | A = A^T\}.$$

(1) Verificare che se $A, B \in U$, allora si ha: $A + B \in U$;
(2) stabilire se per ogni $A, B \in U$ si ha anche $A \cdot B \in U$;
(3) verificare che U è un sottospazio di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$;
(4) determinare una base per U e completarla ad una base di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

Risoluzione. Ricordiamo innanzittutto che la trasposta di una matrice $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ è la matrice che si ottiene scambiando le righe di A con le sue colonne, in simboli:

$$(A^T)^i = (A_i)^T, \quad \forall i = 1, .., n,$$

cioè la colonna i-esima di A^T è la i-esima riga di A disposta in verticale. Si può verificare facilmente che l'operazione di trasposizione gode delle seguenti proprietà:

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad \forall A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2);$$
$$(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2);$$
$$(A \cdot B)^T = B^T . A^T, \quad \forall A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2).$$

(1) Siano ora A e B due matrici di U. Dalla prima proprietà dell' operazione di trasposizione e poiché e $A = A^T$ e $B = B^T$, otteniamo:

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B,$$

da cui possiamo concludere che $A + B \in U$.
(2) Siano A e B due matrici di U. Dalla terza proprietà dell' operazione di trasposizione e poiché e $A = A^T$ e $B = B^T$, otteniamo che:

$$(A \cdot B)^T = B^T . A^T = B \cdot A,$$

poiché in generale risulta $A \cdot B \neq B \cdot A$, possiamo concludere che il prodotto $A \cdot B \notin U$. Più precisamente, se $A, B \in U$, il loro prodotto $A \cdot B \in U$ se e solo se le matrici commutano, cioè $A \cdot B = B \cdot A$.
(3) Per verificare che U è un sottospazio proviamo che è chiuso rispetto alla somma e chiuso rispetto alla moltiplicazione per un numero reale. La prima

verifica è già stata eseguita rispondendo al quesito (1). Per la seconda, siano $A \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, dalla seconda proprietà dell' operazione di trasposizione e poiché e $A = A^T$, otteniamo:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A,$$

da cui concludiamo che $\alpha A \in U$.
(4) Per trovare una base di U, iniziamo descrivendo le matrici $A \in U$. Osserviamo che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \quad A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

quindi $A \in U$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \iff b = c.$$

Le matrici $A \in U$ si possono scrivere in funzione di tre parametri reali liberi a, b e d:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi trovato un sistema di 3 generatori per il sottospazio U. Verifichiamo che tali generatori sono linearmente indipendenti. Osserviamo che:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_{2\times 2}$;
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$;
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$.

Possiamo quindi concludere che le matrici trovate costituiscono una base di U e quindi $\dim U = 3$:

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right\}.$$

Per completare $\mathcal{B}_U$ ad una base di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, poiché sappiamo che $\dim \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) = 4$, basta aggiungere una matrice $B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ che non appartenga ad U. Ad esempio la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

non appartiene ad U (infatti $b = 1 \neq c = 0$). Osserviamo che le matrici:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sono linearmente indipendenti, poiché $\dim \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) = 4$, sono necessariamente una base per $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

Esercizio 3.7. (11 febbraio 2010, Appello)
Si consideri la seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, e siano U e W gli insiemi così definiti:

$$U = \{M \in \mid \mathrm{tr}(A \cdot M) = 0\};$$
$$W = \{M \in \mid A \cdot M = O_{2\times 2}\}.$$

(1) Dimostrare che U e W sono sottospazi vettoriali reali.
(2) Calcolare le dimensioni di U e W.
(3) Verificare che W è un sottospazio proprio di U.

Risoluzione. (1) Verifichiamo che U è chiuso rispetto alla somma di matrici. Siano M_1 e $M_2 \in U$, abbiamo:

$$\mathrm{tr}(A \cdot (M_1 + M_2)) = \mathrm{tr}(A \cdot M_1 + A \cdot M_2) = \mathrm{tr}(A \cdot M_1) + \mathrm{tr}(A \cdot M_2) = 0 + 0 = 0,$$

quindi $M_1 + M_2 \in U$. Verifichiamo ora che U è chiuso rispetto al prodotto di una matrice per un numero reale. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M \in U$, abbiamo:

$$\mathrm{tr}(A \cdot (\alpha M)) = \mathrm{tr}(\alpha A \cdot M) = \alpha\, \mathrm{tr}(A \cdot M) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

quindi $\alpha M \in U$.
Verifichiamo che W è chiuso rispetto alla somma di matrici. Siano M_1 e $M_2 \in W$, abbiamo:

$$A \cdot (M_1 + M_2) = A \cdot M_1 + A \cdot M_2 = O_{2\times 2} + O_{2\times 2} = \mathbf{O}_{2\times 2},$$

quindi $M_1 + M_2 \in W$. Verifichiamo ora che W è chiuso rispetto al prodotto di una matrice per un numero reale. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M \in W$, abbiamo:

$$A \cdot (\alpha M) = \alpha(A \cdot M) = \alpha \cdot \mathbf{O}_{2\times 2} = O_{2\times 2},$$

quindi $\alpha M \in W$.
(2) Sia $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$, calcoliamo il prodotto $A \cdot M$:

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c-a & d-b \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che:

$$M \in U \iff \mathrm{tr}(A \cdot M) = a - c + d - b = 0 \iff d = b + c - a.$$

Le matrici $M \in U$ si possono scrivere nel seguente modo:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & b+c-a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e le matrici $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \right\}$ sono una base di U.
Infine abbiamo:

$$M \in W \iff A \cdot M = \mathbf{O}_{2\times 2} \iff \begin{cases} a - c = 0 \\ b - d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}.$$

Le matrici $M \in W$ si possono scrivere nel seguente modo:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e le matrici $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base per W. Pertanto risulta $\dim U = 3$ e $\dim W = 2$.

(3) Verifichiamo che W è un sottospazio di U. Sia $M \in W$, allora si ha:

$$A \cdot M = O_{2\times 2}, \implies \operatorname{tr}(A \cdot M) = 0,$$

per cui risulta $M \in U$. Poiché risulta $\dim W = 2$ e $\dim U = 3$, W è un sottospazio proprio di U.

Esercizio 3.8. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ costituiscono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$;
(2) scrivere le equazioni del cambiamento di base relative al passaggio dalla base canonica $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}$;
(3) calcolare le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ del vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Risoluzione. (1) I vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti. A tale scopo, consideriamo la matrice quadrata A avente come colonne i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e verifichiamo che il suo determinante sia non nullo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

(2) Ricordiamo che la base canonica $\mathcal{B}_c$ di $\mathbb{R}^3$ è la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, data dai vettori $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, è ben noto che le sue coordinate rispetto alla base canonica sono le entrate, cioè:

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, abbiamo:

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \boldsymbol{v} = x'\boldsymbol{v}_1 + y'\boldsymbol{v}_2 + z'\boldsymbol{v}_3.$$

Passando alle coordinate abbiamo:

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = x'[\boldsymbol{v}_1]_{\mathcal{B}} + y'[\boldsymbol{v}_2]_{\mathcal{B}} + z'[\boldsymbol{v}_3]_{\mathcal{B}}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

dove A è la matrice che ha come colonne $[\boldsymbol{v}_1]_{\mathcal{B}}$, $[\boldsymbol{v}_2]_{\mathcal{B}}$ e $[\boldsymbol{v}_3]_{\mathcal{B}}$. La relazione tra le due coordinate del vettore $\boldsymbol{v}$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + y' \\ -y' + z' \\ x' + y' + z' \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice A è invertibile, possiamo scrivere:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice inversa di A:

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{|A|}(\alpha_{ij}) \quad \alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{[j,i]}|.$$

Risulta:

$\alpha_{11} = -2, \alpha_{12} = -1, \alpha_{13} = 1, \alpha_{21} = 1, \alpha_{22} = 1, \alpha_{23} = -1, \alpha_{31} = 1, \alpha_{32} = 0, \alpha_{33} = -1.$

Abbiamo quindi:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pertanto

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ -x - y + z \\ -x + z \end{pmatrix}.$$

(3) Sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ si ottengono immediatamente dalla formula precedente:

$$[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 + 2 - (-1) \\ -1 - 2 + (-1) \\ -1 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.9. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & 1 \\ 0 & h & h+1 & 1 \\ 0 & 2 & h+1 & 1 \end{pmatrix}$$

in funzione del parametro reale h, determinare il rango di A al variare di h:

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 & h \neq 2 \\ 2 & h = 2 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 3.10. Data la matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & h \end{pmatrix}$$

in funzione del parametro reale h, determinare:

(1) $|A|$:

$$|A| = 1 + h^3;$$

(2) il rango di A al variare di h:

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 & h \neq -1 \\ 2 & h = -1 \end{cases};$$

(3) per quali valori di h la matrice è invertibile:

$$\forall\ h \neq -1.$$

CAPITOLO 4

Sistemi di equazioni lineari

Gli esercizi proposti in questo capitolo riguardano la teoria dei sistemi lineari.

Esercizio 4.1. (4 febbraio 2009, Prova in itinere)
Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale h:

$$\begin{cases} (h+1)x + (h-1)y + z = 0 \\ (2h-1)x + y + (h-1)z = h \end{cases}$$

(1) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni,
(2) determinare per quali valori di h l'insieme delle soluzioni è una retta in $\mathbb{R}^3$,
(3) risolvere il sistema per $h = -1$.

Risoluzione. (1) Osserviamo che il sistema dato è un sistema di 2 equazioni e 3 incognite. La matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti sono le seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} h+1 & h-1 & 1 \\ 2h-1 & 1 & h-1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

Prima di tutto calcoliamo il rango di A al variare di $h \in \mathbb{R}$; $\forall h \in \mathbb{R}$ risulta $1 \leq \operatorname{rg}(A) \leq 2$. Scegliamo un minore di ordine 2 in A, ad esempio quello determinato dalle colonne A^2 e A^3:

$$\delta = \begin{vmatrix} h-1 & 1 \\ 1 & h-1 \end{vmatrix} = (h-1)^2 - 1 = h^2 - 2h = h(h-2).$$

Osserviamo che risulta:

$$\delta = 0 \iff h = 0 \ \vee h = 2.$$

Possiamo quindi affermare che:
$\forall h \in \mathbb{R}$, con $h \neq 0$ e $h \neq 2$, $\operatorname{rg}(A) = 2$. Consideriamo ora la matrice completa del sistema $\tilde{A} = (A|B)$; questa è una matrice di ordine 2×4, pertanto si ha $\operatorname{rg}(\tilde{A}) \leq 2$, per ogni $h \in \mathbb{R}$. Possiamo concludere che, $\forall h \in \mathbb{R}$, con $h \neq 0$ e $h \neq 2$:

$$\operatorname{rg}(\tilde{A}) = \operatorname{rg}(A) = 2.$$

Per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette soluzioni e l'insieme delle soluzioni $\mathcal{V}_h$ è una varietà lineare di dimensione $3 - 2 = 1$ in $\mathbb{R}^3$, quindi è una retta in $\mathbb{R}^3$, che non passa per l'origine.

Esaminiamo ora, caso per caso, i valori del parametro rimasti.

Sia $h = 0$: sostituiamo tale valore nel sistema, abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che il sistema è omogeneo, quindi ammette sempre soluzioni. Poiché risulta $A_2 = -A_1$, possiamo concludere che $\text{rg}(A) = 1$. L'insieme delle soluzioni è quindi un sottospazio V_0 di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3 - 1 = 2$, è quindi un piano di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine.
Sia ora $h = 2$: sostituiamo tale valore nel sistema, abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si osserva che le righe della matrice A sono uguali: $\text{rg}(A) = 1$. Indichiamo con $\tilde{A} = (A, B)$; si vede subito che ogni sottomatrice che contiene la colonna B ha determinante non nullo: risulta $\text{rg}(\tilde{A}) = 2$. Quindi abbiamo:

$$\text{rg}(A) \neq \text{rg}(\tilde{A}).$$

Pertanto, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema non ammette soluzioni per $h = 2$. Riassumendo il sistema ammette soluzioni per $h \neq 2$..
(2) La discussione riportata al punto precedente permette di affermare che il sistema ha per soluzione una retta di $\mathbb{R}^3$ per $h \neq 2$ e $h \neq 0$.
(3) Con $h = -1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -2y + z = 0 \\ -3x + y + -2z = -1 \end{cases}$$

Scambiando le due righe, possiamo individuare in z la variabile libera; dall'equazione $-2y + z = 0$ ricaviamo $y = z/2$. Sostituendo nell'altra, otteniamo

$$-3x + z/2 - 2z = -3x - (3/2)z = -1$$

da cui $x = -(1/2)z + 1/3$.
La soluzione in forma parametrica ha la forma

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3} \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4.2. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} hx + y = 0 \\ x + hy - z = 1 \\ -y + hz = 0 \end{cases},$$

stabilire per quali valori del parametro reale h

(1) il sistema ha soluzioni reali;
(2) il sistema ammette un'unica soluzione;
(3) l'insieme delle soluzioni è una retta in $\mathbb{R}^3$;
(4) l'insieme delle soluzioni è un piano in $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione. (1) Il sistema lineare è non omogeneo, ha 3 equazioni in 3 incognite. In forma matriciale il sistema si scrive $AX = B$, dove la matrice A dei coefficienti, la colonna B dei termini noti e il vettore X delle incognite sono i seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & h & -1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Indicata con $\tilde{A}$ la matrice completa, ottenuta aggiungendo ad A la colonna B, per il teorema di Rouché Capelli il sistema ammette soluzioni se e solo si ha:

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\tilde{A}).$$

Per determinare il rango della matrice A, cerchiamo i valori del parametro h che annullano il determinante di A; risulta:

$$|A| = 0 \iff h(h^2 - 2) = 0 \iff h = 0,\ h = \pm\sqrt{2}.$$

Poiché $r(\tilde{A}) \leq 3$, possiamo concludere che se $h \neq 0$ e $h \neq \pm\sqrt{2}$ risulta:

$$\operatorname{rg}(A) = 3 = \operatorname{rg}(\tilde{A}).$$

Sia,ora, $h = 0$, abbiamo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$: osserviamo che i vettori colonna A^1 e A^2 sono linearmente indipendenti, inoltre si ha $A^3 = -A^1$ e $B = A^1$. Quindi risulta:

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\tilde{A}) = 2.$$

Sia, infine, $h = \pm\sqrt{2}$ abbiamo $A = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \pm\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$ osserviamo che i vettori A^1, A^2 sono linearmente indipendenti; inoltre si ha:

$$\det \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \pm\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Risulta quindi:

$$\operatorname{rg}(A) = 2 \quad r(\tilde{A}) = 3.$$

Possiamo quindi concludere che il sistema ammette soluzioni reali se e solo se $h \neq \pm\sqrt{2}$.

(2) Ricordiamo che, per i valori del parametro h per cui il sistema è risolubile, l'insieme delle soluzioni del sistema è la varietà lineare

$$\mathcal{V} = V + X_0,$$

dove V è il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$V = \{X \in \mathbb{R}^3 |\ \ AX = \mathbf{0}_3\},$$

ed il vettore $X_0 \in \mathbb{R}^3$ è una soluzione del sistema, i.e.

$$AX_0 = B.$$

La dimensione della varietà $\mathcal{V}$ è la dimensione del sottospazio V:

$$\dim \mathcal{V} = \dim V = 3 - \mathrm{rg}(A).$$

Il sistema pertanto ammette un'unica soluzione se e solo se $\mathcal{V} = \{X_0\}$, se e solo se $\dim \mathcal{V} = 0$, se e solo se $\mathrm{rg}(A) = 3$. Quindi il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se $h \neq 0$ e $h \neq \pm\sqrt{2}$.
(3) La varietà $\mathcal{V}$ è una retta in $\mathbb{R}^3$ se e solo se $\dim \mathcal{V} = 1$, se e solo se $\mathrm{rg}(A) = 2$, se e solo se $h = 0$.
(4) Osserviamo che poiché risulta $\forall h \;\; \mathrm{rg}(A) \geq 2$, allora $\dim \mathcal{V} \leq 1$. Concludendo non esistono valori reali di h per cui $\mathcal{V}$ sia un piano in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.3. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} (2h-1)x - hy + 2z = 2 - h \\ hx - y + (h+1)z = 2h - h^2 \end{cases},$$

stabilire per quali valori del parametro reale h

(1) il sistema ha soluzioni reali;
(2) l'insieme delle soluzioni è una retta in $\mathbb{R}^3$;
(3) l'insieme delle soluzioni è un piano in $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione. Il sistema lineare è non omogeneo, ha 2 equazioni in 3 incognite. In forma matriciale il sistema si scrive $AX = B$, dove la matrice A dei coefficienti, la colonna B dei termini noti e il vettore X delle incognite sono i seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 2h-1 & -h & 2 \\ h & -1 & h+1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2-h \\ 2h-h^2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Indicata con $\tilde{A}$ la matrice completa, ottenuta aggiungendo ad A la colonna B, per il teorema di Rouché Capelli il sistema ammette soluzioni se e solo si ha:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A}).$$

Osserviamo che $\mathrm{rg}(A) \leq 2$ e $\mathrm{rg}(\tilde{A}) \leq 2$. Consideriamo il seguente minore di ordine 2 di A:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 2h-1 & -h \\ h & -1 \end{pmatrix} = (h-1)^2,$$

poiché $\Delta = 0$ se e solo se $h = 1$, possiamo concludere che se $h \neq 1$ allora risulta:

$$\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(\tilde{A}),$$

e il sistema ammette soluzioni reali.

Se $h = 1$, le matrici A ed $\tilde{A}$ sono le seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

risulta, pertanto

$$\mathrm{rg}(A) = 1 = \mathrm{rg}(\tilde{A}),$$

il sistema ammette quindi soluzioni reali.

(1) La risposta al quesito è la seguente: il sistema ammette soluzioni reali per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(2) Ricordiamo che l' insieme delle soluzioni del sistema è la varietà lineare

$$\mathcal{V} = V + X_0,$$

dove V è il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}_2$ e $X_0 \in \mathbb{R}^3$ è una soluzione del sistema, i.e.

$$AX_0 = B.$$

La dimensione della varietà $\mathcal{V}$ è la dimensione del sottospazio V:

$$\dim \mathcal{V} = \dim V = 3 - \mathrm{rg}(A).$$

Osserviamo che $\mathcal{V}$ è una retta in $\mathbb{R}^3$ se e solo se $\dim \mathcal{V} = 1$, se e solo se $r(A) = 2$: la risposta al quesito è quindi $h \neq 1$.
(3) Osserviamo che se $h = 1$, poiché $\mathrm{rg}(A) = 1$, $\dim \mathcal{V} = 2$, quindi $\mathcal{V}$ è il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$x - y + 2z = 1.$$

La risposta al quesito è quindi $h = 1$.

Esercizio 4.4. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} h\,x + y + z = 0 \\ (1+h)x + y + k\,z = h^2 - 2 \\ -x + h\,y + (h+k)z = k \end{cases},$$

stabilire per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette soluzioni.

Risoluzione. La matrice dei coefficienti del sistema

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1+h & 1 & k \\ -1 & h & h+k \end{pmatrix}$$

è quadrata; calcoliamo direttamente il suo determinante:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} h & 1 & 1 \\ 1+h & 1 & k \\ -1 & h & h+k \end{vmatrix} = h^2 - kh^2 - 2k + 1 = h^2 + 1 - k(h^2+2).$$

Osserviamo che risulta $\det(A) = 0$ se e solo se $h^2 + 1 - k(h^2+2) = 0$. Poiché $h^2 + 2 > 0$, otteniamo che

$$\det(A) = 0 \iff k = \frac{h^2+1}{h^2+2}.$$

Pertanto se $k \neq \frac{h^2+1}{h^2+2}$, si ha: $|A| \neq 0$, quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$. Poiché la matrice completa è di ordine 3×4, non può avere rango superiore a 3, pertanto risulta: $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = \mathrm{rg}(A|B) = 3$. Quindi per ogni $k \neq \frac{h^2+1}{h^2+2}$ il sistema ammette soluzioni. Più presisamente, per tali valori di k, il sistema ammette un'unica soluzione, perché il sistema è quadrato di ordine $3 = \mathrm{rg}(A)$.

Per $k = \frac{h^2+1}{h^2+2}$, la matrice A diventa

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1+h & 1 & \frac{h^2+1}{h^2+2} \\ -1 & h & h + \frac{h^2+1}{h^2+2} \end{pmatrix},$$

e risulta $\det(A) = 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Consideriamo la sottomatrice 2×2 che contiene le prime due righe e le prime due colonne, il suo determinante non è nullo: infatti

$$\begin{vmatrix} h & 1 \\ 1+h & 1 \end{vmatrix} = h - (1+h) = -1 \neq 0,$$

quindi risulta $\operatorname{rg}(A) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Determiniamo ora, per $k = \frac{h^2+1}{h^2+2}$, il rango della matrice completa di tipo 3×4:

$$\tilde{A} = (A|B) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 & 0 \\ 1+h & 1 & \frac{h^2+1}{h^2+2} & h^2-2 \\ -1 & h & h + \frac{h^2+1}{h^2+2} & \frac{h^2+1}{h^2+2}. \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Studiamo il minore di ordine 3 individuato dalla sottomatrice formata dalla prima, seconda e ultima colonna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} h & 1 & 0 \\ 1+h & 1 & h^2-2 \\ -1 & h & \frac{h^2+1}{h^2+2} \end{vmatrix} = -\frac{(h^2+1)(h^4-3)}{h^2+2}. \tag{4.2}$$

Osserviamo che $\Delta = 0$ se e solo se $h = \pm\sqrt[4]{3}$. Per $h \neq \pm\sqrt[4]{3}$, $\Delta \neq 0$, quindi la matrice $(A|B)$ ha rango 3. Poiché risulta $\operatorname{rg}(A) = 2 \neq \operatorname{rg}(A|B)$, il sistema non ammette soluzioni. Riassumendo:
se $k = \frac{h^2+1}{h^2+2}$ e $h \neq \pm\sqrt[4]{3}$, il sistema non ammette soluzioni.

Se $h = \pm\sqrt[4]{3}$, risulta $\operatorname{rg}(A|B) = 2 = \operatorname{rg}(A)$, quindi il sistema ammette soluzioni. Più precisamente l'insieme delle soluzioni è una varietà lineare $\mathcal{V}$ di dimensione $3 - \operatorname{rg}(A) = 1$, cioè è una retta in $\mathbb{R}^3$ che non passa per l'origine. Riassumendo:
se $k = \frac{h^2+1}{h^2+2}$ e $h = \pm\sqrt[4]{3}$, cioè $k = \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ e $h = \pm\sqrt[4]{3}$, il sistema ammette soluzioni.

Esercizio 4.5. (4 febbraio 2009, Appello)
Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale h:

$$\begin{cases} hx + y = 1 \\ x + hy = h \\ (1-h)x + y + hz = 0 \\ 2x + (2+h)y + hz = 1+h \end{cases},$$

Determinare:

(1) per quali valori di h il sistema ammette soluzioni,
(2) per quali valori di h l'insieme delle soluzioni è una retta in $\mathbb{R}^3$,
(3) per quali valori di h il sistema ha un'unica soluzione.

Risoluzione. (1) Il sistema dato non è omogeneo, ha 4 equazioni e 3 incognite. La matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti sono i seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & h & 0 \\ (1-h) & 1 & h \\ 2 & (2+h) & h \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 0 \\ 1+h \end{pmatrix},$$

indichiamo con $\tilde{A}$ la matrice completa ottenuta aggiungendo ad A la colonna B dei termini noti. Per il teorema di Rouché Capelli il sistema ammette soluzioni se e solo si ha:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A}).$$

Poiché la matrice $\tilde{A}$ è quadrata, cominciamo calcolando il suo determinante. Si ha:

$$\det(\tilde{A}) = \begin{vmatrix} h & 1 & 0 & 1 \\ 1 & h & 0 & h \\ (1-h) & 1 & h & 0 \\ 2 & (2+h) & h & 1+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & 1 & 0 & 1 \\ 1 & h & 0 & h \\ -1-h & -1-h & 0 & -1-h \\ 2 & (2+h) & h & 1+h \end{vmatrix} =$$

$$= -h(-1-h) \begin{vmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & h \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

poiché l'ultima matrice scritta 3×3 ha due colonne uguali. La matrice $\tilde{A}$ ha rango ≤ 3 per ogni $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo ora il rango di A al variare di h. Cominciamo scegliendo un minore in A di ordine 3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & h & 0 \\ (1-h) & 1 & h \end{vmatrix} = h(h^2-1),$$

risulta $\Delta_1 = 0$ se e solo se $h = 0$ o $h = 1$ o $h = -1$. Possiamo quindi affermare che se $h \neq 0, 1, -1$ si ha $\mathrm{rg}(A) = 3 = \mathrm{rg}(\tilde{A})$, per cui il sistema ammette soluzioni.

Analizziamo ora separatamnete i valori rimasti di h.

Se $h = 0$ si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che le colonne A^1 e A^2 sono linearmente indipendenti e A^3 è nulla, quindi $\mathrm{rg}(A) = 2$. Tuttavia, il seguente minore di ordine 3 di $\tilde{A}$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

è non nullo, dunque $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = 3 \neq \mathrm{rg}(A)$. Il sistema non ammmette soluzioni per $h = 0$.

Se $h = 1$ si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che le colonne A^1 e A^2 sono linearmente indipendenti e risulta $A^3 = A^2 - A^1$, quindi $\text{rg}(A) = 2$. Inoltre risulta che $B = A^1 - A^2$, quindi anche la matrice completa ha rango 2. Pertanto risulta $\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) = 2$, il sistema ammmette soluzioni per $h = 1$.
Se $h = -1$ si ha:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le colonne A^1 e A^2 sono linearmente indipendenti e $-3A^3 = A^1 + A^2$, quindi $\text{rg}(A) = 2$. Inoltre risulta che $B = A^3 + A^2$, quindi anche la matrice completa ha rango 2. Pertanto risulta $\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) = 2$, il sistema ammmette soluzioni per $h = -1$.
Concludendo abbiamo che il sistema ammette soluzioni per ogni $h \neq 0$.
(2) Se il sistema è risolubile, l'insieme dele soluzioni è una varietà lineare $\mathcal{V}$ di dimensione $3 - \text{rg}(A)$. Pertanto $\mathcal{V}$ è una retta in $\mathbb{R}^3$ se e solo se ha dimensione 1 se e solo se $\text{rg}(A) = 2$. Dalla discussione precedente, ciò si verifica se e solo se $h = 1$ o $h = -1$.
(3) Infine, il sistema ha un'unica soluzione se e solo se $\mathcal{V}$ ha dimensione 0 se e solo se $\text{rg}(A) = 3$. Dalla discussione precedente, ciò si verifica per ogni $h \neq 1, -1, 0$.

Esercizio 4.6. (19 febbraio 2009, Appello)
Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k:

$$\begin{cases} x + (k+1)y + z = 0 \\ -4x + y + kz = 0 \\ (k+4)x - y = k + 1 \end{cases}$$

(1) Determinare per quali valori di k il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\forall k \neq 0, -1, -4.$$

(2) Determinare per quali valori di k l'insieme delle soluzioni è una retta in $\mathbb{R}^3$:

$$k = -1.$$

(3) Risolvere il sistema per $k = 1$:

$$x = \frac{1}{5} \quad y = -1 \quad z = \frac{9}{5}.$$

Esercizio 4.7. (6 luglio 2009, Appello)
Si consideri la matrice dipendente dal parametro reale h

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h+1 & 1 \\ h & h & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Si determini il rango di A al variare di h:
Per $h = 0, 1$ $\operatorname{rg} A = 2$; per $h \neq 0, 1$ $\operatorname{rg} A = 3$.
(2) Si consideri il sistema dipendente da h

$$\begin{cases} hx + y = 0 \\ y + hz = 2 \\ hx + (h+1)y + z = 1 \\ hx + hy = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h = 2$
(b) Si determini per quali valori di h la soluzione esiste ed è unica: $h = 2$

Esercizio 4.8. (16 settembre 2009, Appello)
Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k:

$$\begin{cases} kx + y + (k+2)z = 2 \\ x + ky + (2k+1)z = k+1 \end{cases}$$

(1) Determinare per quali valori di k **non** ammette soluzione: $k = -1$
(2) Determinare per quali valori di k l'insieme delle soluzioni è una retta in $\mathbb{R}^3$: $k \neq 1, -1$
(3) Determinare per quali valori di k l'insieme delle soluzioni è un piano in $\mathbb{R}^3$: $k = +1$

Esercizio 4.9. (23 settembre 2009, Appello straordinario)
Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k:

$$\begin{cases} kx + z = 2 \\ x - 2y - kz = -1 \\ x + kz = -2 \end{cases}$$

(1) Determinare per quali valori di k il sistema ammette **un'unica** soluzione:
$k \neq \pm 1$
(2) Determinare per quali valori di k il sistema **non ammette** soluzioni:
$k = +1$
(3) Determinare per quali valori di k il sistema ammette **infinite** soluzioni:
$k = -1$

(4) Posto $k = 2$, risolvere il sistema.

$$x = 2, \quad y = \frac{7}{2}, \quad z = -2\,.$$

ESERCIZIO 4.10. (14 settembre 2010, Appello)
Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale h:

$$\begin{cases} x + hy + z + (h^2 - 1)t = h + 1 \\ y + z + t = 0 \\ x + hy + z = 0 \end{cases}$$

(1) Determinare per quali valori di h il sistema ammette soluzioni: $h \neq 1$
(2) Determinare per quali valori di h l'insieme delle soluzioni ha dimensione 2: $h = -1$
(3) Posto $h = 2$, risolvere il sistema. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, z libero

---

ESERCIZIO 4.11. (14 settembre 2010, Appello)
Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale k:

$$\begin{cases} x + y - kz = k \\ x + y + z = 2 + 3k \\ 2x - ky + z = 2 \end{cases}$$

(1) Si determini per quali valori di k il sistema ammette soluzioni: $k \neq -2\,.$
(2) Si determini per quale valore di k la soluzione non è unica: $k = -1\,.$
(3) In corrispondenza del valore di k del punto precedente, si determini la soluzione generale del sistema:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 - t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

CAPITOLO 5

Applicazioni lineari

Gli esercizi proposti in questa sezione si riferiscono allo studio delle applicazioni lineari.

Esercizio 5.1. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni tra spazi vettoriali sono lineari:

(1) $L_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad L_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot y$;

(2) $L_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad L_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x - y \end{pmatrix}$;

(3) $L_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad L_3(x) = \begin{pmatrix} ax \\ x + b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. (1) Ricordiamo che $L_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

$$L_1(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = L_1(\boldsymbol{v}_1) + L_1(\boldsymbol{v}_2) \quad \forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2,$$
$$L_1(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda L_1(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sia $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, osserviamo che risulta

$$\lambda \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}, \quad L_1(\lambda \boldsymbol{v}) = L_1 \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda x \cdot \lambda y = \lambda^2 x \cdot y,$$
$$\lambda L_1(\boldsymbol{v}) = \lambda x . y;$$

poiché risulta $L_1(\lambda \boldsymbol{v}) \neq \lambda L_1(\boldsymbol{v})$, per $\lambda \neq 0, 1$, possiamo concludere che L_1 non è lineare.

(2) Sia $L_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $L_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x - y \end{pmatrix}$. Osserviamo che l'applicazione L_2 può essere scritta in forma matriciale

$$L_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La linearità di L_2 segue dalle proprietà di linearità del prodotto matriciale, infatti si ha:

$$A \cdot (X + X') = A \cdot X + A \cdot X', \quad \forall X, X' \in M_{\mathbb{R}}(2, 1),$$
$$A \cdot (\lambda X) = \lambda (A \cdot X), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall X \in M_{\mathbb{R}}(2, 1),$$

quindi L_2 è un'applicazione lineare.

(3) Sia $L_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $L_3(x) = \begin{pmatrix} ax \\ x+b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Condizione necessaria affinché L_3 sia lineare è che risulti $L_3(0_{\mathbb{R}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, quindi

$$L_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies b = 0.$$

Verifichiamo ora che $L_3(x) = \begin{pmatrix} ax \\ x \end{pmatrix}$ è lineare $\forall a \in \mathbb{R}$. A tal fine possiamo scrivere L_3 in forma matriciale

$$L_3(x) = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x,$$

da cui possiamo concludere che L_3 è lineare per $b = 0$ e $\forall a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5.2. Si consideri l'operatore lineare $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ y + z \\ x + z \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
(2) calcolare la dimensione degli spazi $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$;
(3) scrivere le equazioni dei sottospazi $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$;
(4) determinare una base per i sottospazi $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$.

Risoluzione. (1) Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo le immagini dei vettori della base

$$L(\boldsymbol{e}_1) = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{e}_2) = L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{e}_3) = L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ associata ad L nella base $\mathcal{B}$ ha come colonne, rispettivamente, le coordinate dei vettori $L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2), L(\boldsymbol{e}_3)$ nella base $\mathcal{B}$. Risulta quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

inoltre l'operatore si scrive in forma matriciale

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(2) Ricordiamo come sono definiti i sottospazi $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

$$\operatorname{Ker} L = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid L(\boldsymbol{v}) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\},$$

$$\operatorname{Im} L = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \colon\ L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \right\}.$$

Ricordiamo che i vettori $L(\boldsymbol{e}_1)$, $L(\boldsymbol{e}_2), L(\boldsymbol{e}_3)$ sono un sistema di generatori del sottospazio immagine $\operatorname{Im} L$ e che risulta

$$\dim(\operatorname{Im} L) = \operatorname{rg} A.$$

Poiché $|A| = -2 + 2 = 0$, e le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti si ha $r(A) = 2$. Possiamo concludere che $\dim \operatorname{Im} L = 2$ e quindi $\operatorname{Im} L$ è un piano in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine, generato dai vettori $L(\boldsymbol{e}_1)$ e $L(\boldsymbol{e}_2)$. Dal teorema delle dimensoni si ha che:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L),$$

da cui ricaviamo che $\dim \operatorname{Ker} L = 1$ e quindi $\operatorname{Ker} L$ è una retta in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine.
(3) Osserviamo che risulta:

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{Span}(L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2)) = \left\{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \boldsymbol{w} = \alpha L(\boldsymbol{e}_1) + \beta L(\boldsymbol{e}_2),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\},$$

una rappresentazione parametrica per lo spazio $\operatorname{Im} L$ è la seguente:

$$\begin{cases} x = 2\alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminando i parametri otteniamo l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} L$:

$$x + y - 2z = 0.$$

Il sottospazio $\operatorname{Ker} L$ è lo spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo

$$\operatorname{Ker} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Ker} A.$$

Poiché la matrice A ha rango 2 e la seconda e la terza riga di A sono linearmente indipendenti, le equazioni di $\operatorname{Ker} L$ sono le seguenti:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

(4) Una rappresentazione parametrica per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$ è la seguente:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

da cui deduciamo che $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Possiamo scegliere come base di $\operatorname{Ker} L$: $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Infine, osserviamo che $\operatorname{Im} L = \operatorname{Span}(L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2))$, e i vettori $L(\boldsymbol{e}_1)$ e $L(\boldsymbol{e}_2)$ sono linearmente indipendenti. Una base di $\operatorname{Im} L$ è la seguente :

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 5.3. (4 febbraio 2009, Prova in itinere)
Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ x+z \\ y+z \\ x+y+2z \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(1) la matrice A che rappresenta L rispetto alle basi canoniche;
(2) le dimensioni dei sottospazi $\operatorname{Im} L$ e $\operatorname{Ker} L$;
(3) le equazioni cartesiane per $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$;
(4) una matrice $B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$, non nulla, per cui si abbia $AB = 0$.

Risoluzione. (1) Sia $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo le immagini dei vettori della base:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $L(\boldsymbol{e}_1)$, $L(\boldsymbol{e}_2)$ e $L(\boldsymbol{e}_3)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Ricordiamo che le coordinate di un vettore di $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^4$ sono le entrate del vettore stesso, in simboli:

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

La matrice A è dunque la matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

la forma matriciale dell'applicazione è:

$$L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

(2) Poiché $\operatorname{Im} L = \operatorname{Span}(L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2), L(\boldsymbol{e}_3))$, risulta $\dim \operatorname{Im} L = \operatorname{rg}(A)$. Per calcolare il rango della matrice, basta osservare che le colonne A^1 e A^2 sono linearmente indipendenti e risulta $A^3 = A^1 + A^2$. Si ha quindi $\operatorname{rg}(A) = 2$, per cui $\dim \operatorname{Im} L = 2$. Applicando il teorema delle dimensioni:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} L + \dim \operatorname{Ker} L,$$

(3) Dal quesito precedente si ha che

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{Span}(L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2)) = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{w} = \alpha L(\boldsymbol{e}_1) + \beta L(\boldsymbol{e}_2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \}.$$

Una rappresentazione parametrica per lo spazio $\operatorname{Im} L$ è la seguente:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = \alpha + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminando i parametri otteniamo un sistema di equazioni cartesiane per lo spazio immagine:

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}.$$

Ricordiamo che

$$\operatorname{Ker} L = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}_4 \right\} = \operatorname{Ker} A.$$

Il nucleo è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema lineare omogeno di matrice A. Poiché $\operatorname{rg}(A) = 2$, ci sono due righe linearmente indipendenti in A, quindi le corrispondenti equazioni sono indipendenti e definiscono lo spazio $\operatorname{Ker} L$. Scegliamo le righe A_2 e A_3, otteniamo quindi un sistema di equazioni cartesiane per $\operatorname{Ker} L$:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

(4) Sia B una matrice 3×3. Osserviamo che, poiché A è di tipo 4×3, è possibile eseguire il prodotto AB, ed il risultato è una matrice 4×3. Indichiamo con B^1, B^2 e B^3 le colonne di B. Dalla definizione di prodotto matriciale risulta:

$$A.B = (AB^1 | AB^2 | AB^3).$$

La matrice AB è la matrice nulla se e solo se tutte le sue colonne sono nulle:

$$AB^i = \boldsymbol{0}_4 \quad i = 1, 2, 3.$$

Ciò significa che per ogni $i = 1, 2, 3$, si ha $B^i \in \operatorname{Ker} L$. Dal quesito (3), otteniamo che

$$\operatorname{Ker} L = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}),$$

quindi per ogni $i = 1, 2, 3$ esiste un numero reale α_i tale che $B^i = \alpha_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Concludendo, una matrice B di tipo 3×3 che soddisfa la richiesta può essere scritta nel seguente modo:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3.$$

Esercizio 5.4. (4 febbraio 2009, Appello)
Si consideri la seguente applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice A che rappresenta L rispetto alle basi canoniche degli spazi $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$;
(2) determinare le dimensioni di $\operatorname{Im} L$ e $\operatorname{Ker} L$;
(3) stabilire se L è iniettiva, giustificando la risposta;
(4) determinare le equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} L$;
(5) sia $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} L$.

Risoluzione. (1) Sia $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo le immagini dei vettori della base:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $L(\boldsymbol{e}_1)$ e $L(\boldsymbol{e}_2)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Ricordiamo che le coordinate di un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^3$ sono le entrate del vettore stesso, la matrice A è dunque la matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

la forma matriciale dell'applicazione è:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(2) Osserviamo subito che le colonne A^1 e A^2 sono linearmente indipendenti, cioè $\mathrm{rg}(A) = 2$. Possiamo quindi concludere che $\dim \mathrm{Im}\, L = 2$, cioè $\mathrm{Im}\, L$ è un piano passante per l'origine. Applicando il teorema delle dimensioni otteniamo:

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{Im}\, L + \dim \mathrm{Ker}\, L,$$

da cui ricaviamo che $\dim \mathrm{Ker}\, L = 0$. cioè $\mathrm{Ker}\, L$ contiene solo il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$.

(3) Poiché $\mathrm{Ker}\, L$ contiene solo il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$, L è iniettiva.

(4) Abbiamo

$$\mathrm{Im}\, L = \mathrm{Span}(L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2)) = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \boldsymbol{u} = \alpha L(\boldsymbol{e}_1) + \beta L(\boldsymbol{e}_2), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

da cui ricaviamo la seguente rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta, \\ y = \alpha, \\ z = -\beta, \end{cases} \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Eliminando i parametri otteniamo l'equazione cartesiana di $\mathrm{Im}\, L$:

$$x + y + z = 0.$$

(5) Osserviamo che $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}\, L$ se e solo soddisfa l 'equazione cartesiana trovata nel quesito (4):

$$1 + a + 0 = 0 \implies a = -1.$$

La risposta al quesito è quindi $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}\, L$ se e solo se $a = -1$.

Esercizio 5.5. Si consideri l'applicazione $L \colon \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \to \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ definita da

$$L \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che L è lineare;
(2) scrivere la matrice associata a L nella base canonica di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$;
(3) determinare una base per i sottospazi $\mathrm{Ker}\, L$ e $\mathrm{Im}\, L$.
(4) scrivere l'applicazione L^2.

(1) Ricordiamo che L è un'applicazione lineare se sono verificate le condizioni di linearità, cioè le seguenti condizioni:

$$L(A + B) = L(A) + L(B) \quad \forall A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

$$L(\lambda A) = \lambda L(A) \quad \forall A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cominciamo con la prima. Siano $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, si ha:

$$L(A + B) = L \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & \frac{(b+b'+c+c')}{2} \\ \frac{(b+b'+c+c')}{2} & d + d' \end{pmatrix},$$

osserviamo che

$$L(A) + L(B) = \begin{pmatrix} a + a' & \frac{(b+b'+c+c')}{2} \\ \frac{(b+b'+c+c')}{2} & d + d' \end{pmatrix},$$

per cui la prima condizione è verificata. Passiamo ora alla seconda condizione di linearità. Siano $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha:

$$L(\lambda A) = L \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda \frac{b+c}{2} \\ \lambda \frac{b+c}{2} & \lambda d \end{pmatrix},$$

ma risulta

$$\lambda L(A) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda \frac{b+c}{2} \\ \lambda \frac{b+c}{2} & \lambda d \end{pmatrix},$$

per cui anche la seconda condizione è verificata.
(2) Ricordiamo che la base canonica $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ è costituita dalle matrici $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, dove

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, A si scrive come combinazione lineare delle matrici della base canonica

$$A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22},$$

indichiamo con X il vettore di $\mathbb{R}^4$ delle coordinate di A rispetto alla base fissata, si ha:

$$X = [A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

La matrice associata all'applicazione lineare L nella base fissata è la matrice $M \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(4)$ le cui colonne sono rispettivamente le coordinate di $L(E_{11})$, $L(E_{12})$, $L(E_{21})$, $L(E_{22})$ rispetto alla base fissata. Si ha:

$$L(E_{11}) = L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1E_{11},$$

$$L(E_{12}) = L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}E_{12} + \frac{1}{2}E_{21},$$

$$L(E_{21}) = L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}E_{12} + \frac{1}{2}E_{21},$$

$$L(E_{22}) = L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1E_{22},$$

concludendo la matrice M è la seguente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Il sottospazio $\operatorname{Im} L$ è per definizione il seguente:

$$\operatorname{Im} L = \{B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid \exists A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \colon \ L(A) = B\}.$$

Poiché si ha $\operatorname{rg}(M) = 3$, $\dim(\operatorname{Im} L) = 3$ e una base per $\operatorname{Im} L$ è data dalle matrici

$$L(E_{11}) = E_{11}, \quad L(E_{12}) = \frac{1}{2}(E_{12} + E_{21}), \quad L(E_{22}) = E_{22}.$$

Verifichiamo che lo spazio immagine coincide con il seguente sottospazio di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$:

$$S_2 = \left\{ B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \colon \quad \beta = \gamma \right\},$$

dove S_2 è il sottospazio delle matrici quadrate di ordine 2 reali e simmetriche. Infatti, ricordiamo che S_2 è un sottospazio di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ e che risulta $\dim S_2 = 3$. Proviamo che $\operatorname{Im} L \subset S_2$: sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ si ha

$$L(A) = L \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix},$$

la matrice $L(A)$ è reale simmetrica, quindi $L(A) \in S_2$. Poiché risulta $\dim S_2 = \dim \operatorname{Im} L$, i due sottospazi coincidono.
Il sottospazio $\operatorname{Ker} L$ è per definizione:

$$\operatorname{Ker} L = \left\{ A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid L(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per il teorema delle dimensioni si ha:

$$\dim \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) = \dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L),$$

da cui si ricava che $\dim(\operatorname{Ker} L) = 1$. Osserviamo che risulta

$$L \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = d = 0, \quad b + c = 0.$$

Otteniamo quindi che

$$\operatorname{Ker} L = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}),$$

per cui come base per il sottospazio possiamo scegliere la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) L'applicazione L^2 è la composizione di L con se stessa nel seguente modo:

$$L^2 \colon A \to L(L(A)).$$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, si ha

$$L^2(A) = L(L(A) = L\begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} = L(A) \quad \forall A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2).$$

Possiamo concludere che $L^2 = L$. In modo analogo si verifica che vale la stessa relazione per le matrici associate:

$$M^2 = M.$$

Esercizio 5.6. (19 febbraio 2009, Appello)
Si consideri la seguente applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x-y+z \\ z-2x-y \\ x+z \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice A associata all'applicazione lineare L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(2) determinare la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e $\operatorname{Ker} L$:

$$\dim \operatorname{Im} L = 3 \qquad \dim \operatorname{Ker} L = 0;$$

(3) determinare una base di $\operatorname{Im} L$:

$$\left\{ L(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, L(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, L(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

(4) completare la base di $\operatorname{Im} L$ per avere una base di $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 5.7. (6 luglio 2009, Appello)
Si consideri la seguente applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y-z \\ y+z \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice A che rappresenta L rispetto alle basi canoniche:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) determinare la dimensione di $\operatorname{Im} L$ e $\operatorname{Ker} L$:

$$\dim \operatorname{Im} L = 2 \qquad \dim \operatorname{Ker} L = 1;$$

(3) stabilire se il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$, giustificando la risposta:
Sì: L è surgettiva, poiché $\dim \operatorname{Im} L = \operatorname{rg} A = 2$.

(4) stabilire se L è iniettiva, giustificando la risposta:
No, perché $\dim \operatorname{Ker} L = 1$;

(5) sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $2x + z = 0$, calcolare la dimensione di $L(U)$:

$$\dim L(U) = 1.$$

Esercizio 5.8. (16 settembre 2009, Appello)
Fissata la base canonica $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \quad L(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

(1) Determinare la matrice A che rappresenta L rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

(2) calcolare le dimensioni di $\operatorname{Im} L$ e $\operatorname{Ker} L$:

$$\dim \operatorname{Im} L = 2 \qquad \dim \operatorname{Ker} L = 1;$$

(3) determinare le equazioni di $\operatorname{Im} L$ e $\operatorname{Ker} L$:

$$\operatorname{Im} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0 \right\},$$

$$\operatorname{Ker} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y + 2z = 0,\ x + y + z = 0 \right\};$$

ossia, $\operatorname{Ker} L$ è la retta per l'origine diretta come $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(4) determinare un piano per l'origine $U \subset \mathbb{R}^3$ la cui immagine sia una retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$:
basta prendere un piano che contenga $\operatorname{Ker} L$, ossia che sia generato da

$\boldsymbol{d}$ e da un altro vettore indipendente, per esempio, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Con questa scelta il piano ha equazione $x = z$.

Esercizio 5.9. (23 novembre 2009, Appello straordinario)
Fissata le basi canoniche $\mathcal{B}_3 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, e $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3 \boldsymbol{e}'_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$L(\boldsymbol{e}'_1) = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \quad L(\boldsymbol{e}'_2) = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \quad L(\boldsymbol{e}'_3) = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3 \quad L(\boldsymbol{e}'_4) = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3.$$

(1) Determinare la matrice A che rappresenta L rispetto alle basi fissate:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix};$$

(2) calcolare le dimensioni di $\operatorname{Im} L$ e $\operatorname{Ker} L$:

$$\dim(\operatorname{Im} L) = 2 \quad \dim(\operatorname{Ker} L) = 2;$$

(3) stabilire se L è iniettiva e/o surgettiva, motivando la risposta:
L non è iniettiva poiché $\dim(\operatorname{Ker} L) \neq 0$, e L non è surgettiva poiché $\dim(\operatorname{Im} L) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$;

(4) determinare l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} L$:

$$2x + y + z = 0;$$

(5) determinare una base di $\operatorname{Ker} L$:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 5.10. (11 febbraio 2010, Appello)
Si consideri l'applicazione lineare $L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + hy \\ hx + y \\ (h+1)y \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$ e siano $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(1) Calcolare le immagini dei vettori della base:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 1+h \end{pmatrix};$$

(2) scrivere la matrice A_L rappresentativa di L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & h \\ h & 1 \\ 0 & 1+h \end{pmatrix};$$

(3) stabilire per quale/i valori di h l'applicazione è iniettiva:

$$\forall h \neq -1;$$

(4) posto $h = 1$, determinare la/le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

$$x - y = 0;$$

(5) posto $h = -1$, determinare una base di $\operatorname{Ker} L$:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 5.11. (14 settembre 2010, Appello)
Fissata la base canonica $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2; \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3; \quad L(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3.$$

(1) Calcolare le dimensioni di $\operatorname{Im} L$ e $\operatorname{Ker} L$:

$$\dim(\operatorname{Im} L) = 2 \qquad \dim(\operatorname{Ker} L) = 1;$$

(2) determinare l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} L$:
(3) determinare una base di $\operatorname{Ker} L$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\};$$

(4) sia $\mathcal{B}'$ la base composta dai seguenti vettori:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,$$

determinare la matrice B rappresentativa di L nella base $\mathcal{B}'$:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLO 6

Autovalori ed autovettori di un operatore, diagonalizzazione

Gli esercizi proposti in questa sezione si riferiscono allo studio degli autovalori ed autovettori di un operatore lineare ed alle proprietà della diagonalizzazione.

Esercizio 6.1. Sia $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si consideri l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_3 \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \quad L(\boldsymbol{e}_3) = 3\boldsymbol{e}_3.$$

(1) Determinare gli autovalori di L e le loro molteplicità algebriche;
(2) scrivere le equazioni degli autospazi;
(3) determinare una base per ciascun autospazio;
(4) è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di L?

Risoluzione. L'operatore $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è univocamente determinato dalle immagini dei vettori della base; infatti:

$$\begin{aligned} &L(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3) = \\ &= xL(\boldsymbol{e}_1) + yL(\boldsymbol{e}_2) + zL(\boldsymbol{e}_3) \\ &= x(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_3) + y(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3) + z(3\boldsymbol{e}_3) \\ &= (x+y)\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + (3z - 2x)\boldsymbol{e}_3, \end{aligned} \tag{6.1}$$

da cui ricaviamo

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ 3z-2x \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Ricordiamo che gli autovalori di L sono le soluzioni dell'equazione caratteristica di L, che si ottiene uguagliando a zero il polinomio caratteristico di L. Il polinomio caratteristico di L è:

$$p_L(t) = p_A(t) = |A - tI_3| = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -2 & -2 & 3-t \end{pmatrix} = (1-t)^2(3-t),$$

osserviamo che $p_L(t)$ è totalmente decomponibile in $\mathbb{R}$. L'equazione caratteristica di L è quindi la seguente:

$$(1-t)^2(3-t) = 0\,,$$

le cui soluzioni sono $t = 1$ con molteplicità algebrica $\mu(1) = 2$ e $t = 3$ con molteplicità algebrica $\mu(3) = 1$.
(2), (3) Sia $t = 1$; l'autospazio V_1 è per definizione il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \,|\, L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \right\},$$

inoltre si ha $\dim V_1 = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3)$. Risulta:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

quindi $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$ e di conseguenza $\dim V_1 = 1$. L'autospazio V_1 è la retta per l'origine di equazioni

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases},$$

pertanto $V_1 = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v})$, dove $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base per V_1 è data dal vettore non nullo $\boldsymbol{v}$.
Sia $t = 3$, l'autospazio V_3 è per definizione il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$V_3 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \,|\, L(\boldsymbol{v}) = 3\boldsymbol{v}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^3} \right\},$$

inoltre si ha $\dim V_3 = 3 - \mathrm{rg}(A - 3I_3)$. Risulta:

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi $\mathrm{rg}(A - 3I_3) = 2$ e di conseguenza $\dim V_3 = 1$. L'autospazio V_3 è la retta per l'origine di equazioni

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

pertanto $V_3 = \mathrm{Span}(\boldsymbol{e}_3)$. Una base per V_3 è data dal vettore $\boldsymbol{e}_3$.
(4) Ricordiamo che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di L se e solo se L è diagonalizzabile. Condizione necessaria e sufficiente affinché L sia diagonalizzabile è che la somma delle molteplicità geometriche $\nu-$ degli autovalori sia uguale a $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Poiché tuttavia risulta

$$\nu(1) + \nu(3) = \dim V_1 + \dim V_3 \neq 3,$$

possiamo concludere che L non è diagonalizzabile.

Esercizio 6.2. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3, con k parametro reale:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(1) Calcolare, al variare di k, gli autovaori di B con le relative molteplicità algebriche;
(2) determinare per quali valori di k la matrice B è diagonalizzabile.

Risoluzione. (1) Calcoliamo il polinomio caratteristico di B:

$$p_B(t) = |B - tI_3| = \det \begin{pmatrix} 1-t & k & 1 \\ 0 & k+1-t & 1 \\ 0 & 0 & -1-t \end{pmatrix} = (1-t)(-1-t)(k+1-t).$$

Osserviamo che il polinomio caratteristico è totalmente decomponibile in $\mathbb{R}$. L'equazione caratteristica di B è:

$$(1-t)(-1-t)(k+1-t) = 0,$$

gli autovalori sono quindi $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ e $t_3 = k+1$.
Osserviamo che risulta

$$t_3 = t_1 \iff k = 0,$$
$$t_3 = t_2 \iff k = -2.$$

Pertanto gli autovalori della matrice B e le loro molteplicità algebriche, al variare di k, sono riassunti nel seguente schema:
- se $k \neq 0$ e $k \neq -2$, la matrice B ammette tre autovalori distinti e quindi semplici:

$$t_1 = 1 \quad t_2 = -1 \quad t_3 = k+1, \quad \mu(1) = \mu(-1) = \mu(k+1) = 1;$$

- se $k = 0$, gli autovalori della matrice sono:

$$t_1 = 1, \quad \mu(1) = 2, \quad t_2 = -1, \quad \mu(-1) = 1;$$

- se $k = -2$, gli autovalori della matrice sono:

$$t_1 = 1, \quad \mu(1) = 1, \quad t_2 = -1, \quad \mu(-1) = 2.$$

(2) Osserviamo che se $k \neq 0$ e $k \neq -2$, la matrice B risulta diagonalizzabile poiché ha ordine **3** ed ammette **3** autovalori distinti (N.B: la condizione è sufficiente per la diagonalizzazione, ma non necessaria!). Per i valori rimasti di k studiamo in dettaglio i sottospazi.

Sia $k = 0$, la matrice è $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Poiché $t_2 = -1$ è semplice si ha

$$\nu(-1) = \dim V_{-1} = 1.$$

L'autovalore $t_1 = 1$ non è semplice, calcoliamo la sua molteplicità geometrica. L'autospazio associato è il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid BX = X \right\} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid (B - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

quindi risulta $\dim V_1 = 3 - \mathrm{rg}(B - I_3)$. Poiché si ha:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

risulta $r(B - I_3) = 1$, da cui

$$\nu(1) = \dim V_1 = 2.$$

Poiché si ha

$$\dim V_1 + \dim V_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 = 3,$$

la la matrice B è diagonalizzabile.

Sia $k = -2$, abbiamo $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Poiché $t_1 = 1$ è semplice si ha

$$\nu(1) = \dim V_1 = 1.$$

L'autovalore $t_2 = -1$ non è semplice, calcoliamo la sua molteplicità geometrica. L'autospazio associato è il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$V_{-1} = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \mid BX = -X\right\} = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \mid (B + I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

con $\dim V_1 = 3 - \mathrm{rg}(B + I_3)$. Risulta:

$$B + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha quindi $\mathrm{rg}(B + I_3) = 2$, da cui $\nu(-1) = \dim V_{-1} = 1$. La matrice B non è diagonalizzabile, poiché risulta

$$\dim V_1 + \dim V_{-1} = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

Concludendo, la matrice B risulta diagonalizzabile per ogni $k \neq -2$.

Esercizio 6.3. Considerare le seguenti matrici quadrate reali di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico;
(2) stabilire se le matrici A e B sono simili.

Risoluzione. (1) Calcoliamo rispettivamente il polinomio caratteristico delle matrici A e B:

$$p_A(t) = |A - tI_3| = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (1-t)^2(2-t),$$

$$p_B(t) = |B - tI_3| = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2(2-t),$$

osserviamo che $p_A(t) = p_B(t)$ nell'anello dei polinomi $\mathbb{R}[t]$.
(2) Ricordiamo che la condizione appena verificata è una condizione necesssaria, ma non sufficiente per la relazione di similitudine tra matrici. Cerchiamo di avere maggiori informazioni sulle matrici date, ad esempio se siano diagonalizzabili. Gli autovalori delle matrici sono $t = 1$ con $\mu(1) = 2$ e $t = 2$ con $\mu(2) = 1$. L'autovalore $t = 2$ è semplice, quindi $\nu(2) = \mu(2) = 1$.
Analizziamo l'autovalore $t = 1$. Ricordiamo che l'autospazio $V_{1,A}$ è il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$V_{1,A} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\ (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \right\},$$

con $\dim V_{1,A} = 3 - \operatorname{rg}(A - I_3)$. Poiché risulta:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

abbiamo $r(A - I_3) = 1$ e quindi $\nu(1) = \dim V_{1,A} = 2$. Poiché per la matrice A risulta

$$\nu(1) + \nu(2) = \dim \mathbb{R}^3,$$

A è diagonalizzabile e quindi simile alla matrice $\Delta = diag(1, 1, 2)$.

Analogamente l'autospazio $V_{1,B}$ è il seguente sottospazio:

$$V_{1,B} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon (B - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \right\},$$

con $\dim V_{1,B} = 3 - \operatorname{rg}(B - I_3)$. Poiché risulta:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo $r(B - I_3) = 2$ e quindi $\nu(1) = \dim V_{1,B} = 1$. Poiché per B risulta:

$$\nu(1) + \nu(2) < \dim \mathbb{R}^3,$$

la matrice B non è pertanto diagonalizzabile.
Possiamo concludere che le matrici A e B non sono simili: infatti se B fosse simile ad A, per la proprietà transitiva della similitudine B sarebbe simile anche alla matrice diagonale Δ e quindi B sarebbe diagonalizzabile.

Esercizio 6.4. Sia $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare con la seguente proprietà: esiste un numero reale non nullo α tale che ogni vettore non nullo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ è un autovettore associato all'autovalore α.

(1) Descrivere l'operatore L;
(2) scrivere la matrice associata ad L rispetto ad una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione. (1) Sia $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ un vettore non nullo, poiché $\boldsymbol{v}$ è un autovettore di L associato all'autovalore α, si ha

$$L(\boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{v},$$

se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, poiché L è un operatore lineare si ha $L(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$. Posto $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ otteniamo che L è definito da

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che il nucleo di L per definizione è il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{Ker} L = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \,|\, L(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \right\},$$

osserviamo che $\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, infatti

$$\alpha \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \implies \boldsymbol{v} = 0\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

essendo $\alpha \neq 0$ per ipotesi. Ciò implica che L è un operatore lineare iniettivo (e quindi un automorfismo) di $\mathbb{R}^3$. Infine ricordiamo che

$$\operatorname{Im} L = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \colon L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \right\},$$

possiamo quindi concludere che $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^3$.
(2) Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, calcoliamo le immagini dei vettori della base:

$$L(\boldsymbol{v}_1) = \alpha \boldsymbol{v}_1 \quad L(\boldsymbol{v}_2) = \alpha \boldsymbol{v}_2 \quad L(\boldsymbol{v}_3) = \alpha \boldsymbol{v}_3.$$

La matrice A associata ad L rispetto alla base $\mathcal{B}$ ha come colonne, rispettivamente, le coordinate delle immagini dei vettori della base:

$$A^1 = [L(\boldsymbol{v}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = [L(\boldsymbol{v}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = [L(\boldsymbol{v}_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

La matrice A è quindi la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

ciè $A = \alpha I_3$, dove I_3 è la matrice identità di ordine 3.

Esercizio 6.5. Considerare la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere il polinomio caratteristico di A;
(2) la matrice A è diagonalizzabile?
(3) scrivere la matrice A^{-1} utilizzando il Teorema di Cayley Hamilton.

Risoluzione. (1) Il polinomio caratteristico di A è :

$$p_A(t) = |A - tI_4| = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2(-1-t)^2.$$

(2) Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione caratteristica di A:

$$(1-t)^2(-1-t)^2 = 0$$

le cui soluzioni sono $t = 1$ con $\mu(1) = 2$ e $t = -1$ con $\mu(-1) = 2$. La matrice A è diagonalizzabile se e solo le molteplicità geometriche degli autovalori soddisfano la condizione:

$$\nu(1) + \nu(-1) = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

Ricordiamo che risulta

$$1 \leq \nu(1) \leq \mu(1) = 2, \quad 1 \leq \nu(-1) \leq \mu(-1) = 2,$$

quindi A è diagonalizzabile se e solo si ha $\nu(1) = \nu(-1) = 2$.
Calcoliamo le molteplicità geometriche. Sia $t = 1$, l'autospazio associato è il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = \left\{X \in \mathbb{R}^4 \,|\, AX = X\right\} = \left\{X \in \mathbb{R}^4 \,|\, (A - I_4)X = 0_{\mathbb{R}^4}\right\}$$

con $\dim V_1 = 4 - \mathrm{rg}(A - I_4)$. Risulta:

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo quindi $r(A - I_4) = 3$, per cui $m(1) = \dim V_1 = 1$. Poiché risulta $\nu(1) < 2$, possiamo concludere che A non è diagonalizzabile.
(3) Il teorema di Cayley Hamilton afferma che ogni matrice reale quadrata A di ordine n soddisfa il proprio polinomio caratteristico. Ricordiamo che il polinomio caratteristico di A è il seguente polinomio:

$$p_A(t) = t^4 - 2t^2 + 1,$$

allora la matrice A è una radice del seguente polinomio matriciale

$$p_A(X) = X^4 - 2X^2 + I_4,$$

cioè risulta

$$p_A(A) = A^4 - 2A^2 + I_4 = 0_n.$$

Possiamo quindi scrivere la matrice I_4 come combinazione lineare di potenze di A:

$$I_4 = 2A^2 - A^4,$$

moltiplicando entrambi i membri per la matrice A^{-1} otteniamo:

$$A^{-1} = 2A - A^3.$$

Calcoliamo la matrice A^3:

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine otteniamo la matrice A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.6. (4 febbraio 2009, Prova in itinere)
Si consideri la seguente matrice reale di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare il rango di A;
(2) verificare che il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di A, calcolarne l'autovalore relativo;
(3) scrivere le equazioni degli autospazi di A;
(4) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A;
(5) scrivere una matrice B con lo stesso polinomio caratteristico di A che non sia simile ad A.

Risoluzione. (1) Osserviamo che le colonne di A sono linearmente dipendenti:

$$A^1 + A^2 + A^3 = 0,$$

ma le colonne A^1 e A^2 sono linearmente indipendenti, possiamo quindi concludere che $\mathrm{rg}(A) = 2$.
(2) Ricordiamo che un vettore non nullo $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A se e solo se risulta $A\boldsymbol{v} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v})$. Calcoliamo il prodotto $A\boldsymbol{v}$:

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^1 - A^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

osserviamo che $A\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{v}$, quindi $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A relativamente all'autovalore $\alpha = -3$.
(3) Innanzitutto calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} -2-t & 1 & 1 \\ 1 & -2-t & 1 \\ 1 & 1 & -2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & 1 & 1 \\ -t & -2-t & 1 \\ -t & 1 & -2-t \end{vmatrix} =$$

$$= t\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2-t & 1 \\ -1 & 1 & -2-t \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2-t & 1 \\ -3-t & 1 & -2-t \end{vmatrix} = t(-3-t)(3+t) = -t(t+3)^2.$$

Gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche sono le seguenti:

$$t_1 = 0 \quad \mu(0) = 1, \quad t_2 = -3 \quad \mu(-3) = 2.$$

Osserviamo che, in questo caso, è possibile determinare gli autovalori della matrice e le loro molteplicità algebriche senza calcolare il polinomio caratteristico. Infatti basta ricordare che risulta:

$$t_1 + t_2 + t_3 = tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = -6.$$

Dal quesito (1), risulta $det(A) = 0$, quindi la matrice ammette l'autovalore $t_1 = 0$. Dal quesito (2), la matrice ammette l'autovalore $t_2 = -3$. Abbiamo quindi:

$$0 + (-3) + t_3 = -6 \implies t_3 = t_2 = -3.$$

Consideriamo l'autospazio associato all'autovalore 0:

$$V_0 = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_3 \right\} = \operatorname{Ker} A,$$

risulta $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} A = 3 - 2 = 1$. Poiché la matrice A ha rango 2, V_0 è definito da due equazioni linearmente indipendenti:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases},$$

che sono equivalenti alle equazioni $x - y = z - x = 0$. Risulta quindi

$$V_0 = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Consideriamo l'autospazio associato all'autovalore -3:

$$V_{-3} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{v} \right\} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (A + 3I_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_3 \right\} = \operatorname{Ker}(A + 3I_3).$$

Risulta $A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $\operatorname{rg}(A + 3I_3) = 1$ e $\dim V_{-3} = 3 - 1 = 2$.
L'equazione dell'autospazio è $x + y + z = 0$, una base per esso è la seguente:

$$\mathcal{B}_{V_{-3}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4) Ricordiamo che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A se e solo la somma degli autospazi di A coincide con $\mathbb{R}^3$, cioé

$$\dim V_0 + \dim V_{-3} = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

La base di autovettori di $\mathbb{R}^3$ si ottiene scegliendo una base in ciascun autospazio e poi facendo l'unione delle basi ottenute. Risulta quindi:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{V_0} \cup \mathcal{B}_{V_{-3}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vedremo in seguito un teorema (Teorema spettrale) grazie al quale ogni matrice reale simmetrica risulta diagonalizzabile, quindi ammette una base formata da autovettori.
(5) Sia B una matrice con lo stesso polinomio caratteristico di A. Ricordiamo che se B fosse diagonalizzabile, allora A e B sarebbero simili, in quanto simili alla stessa matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$. Quindi cerchiamo una matrice B con $p_B(t) = p_A(t)$ che non sia diagonalizzabile. A tale scopo basta che l'autospazio V_{-3} abbia dimensione 1:

$$\dim \operatorname{Ker}(B + 3I_3) = 1 \iff \operatorname{rg}(B + 3I_3) = 2.$$

Per semplicità possiamo cercare B nel sottospazio delle matrici triangolari superiori di ordine 3, infatti per esse gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale. Sia B una matrice triangolare superiore con lo stesso polinomio caratteristico di A:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $B + 3I_3 = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi

$$\operatorname{rg}(B + 3I_3) = 2 \iff c \neq 0.$$

Una risposta al quesito (5) è quindi la seguente:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, c \neq 0.$$

Esercizio 6.7. (4 febbraio 2009, Appello)
Si considerino la matrice A e la matrice B dipendente dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Stabilire se il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A, in caso affermativo determinarne l'autovalore relativo;
(2) determinare una base per l'autospazio associato all'autovalore $\alpha = 0$;

(3) determinare al variare di k gli autovalori di B e le relative molteplicità algebriche e geometriche;
(4) stabilire per quali valori di k le matrici A e B sono simili.

Risoluzione. (1) Il vettore $\boldsymbol{v}$ è un autovettore di A se e solo se risulta $A\boldsymbol{v} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v})$, pertanto calcoliamo $A\boldsymbol{v}$:

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

poiché $A\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}$ possiamo concludere che $\boldsymbol{v}$ è un autovettore di A relativo all'autovalore 3.
(2) Osserviamo che la matrice ha rango 1 poiché $A^1 = A^2 = A^3$. Ciò implica che $det(A) = 0$, quindi 0 è un autovalore di A. Inoltre risulta:

$$V_0 = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_3 \right\} = \mathrm{Ker}\, A,$$

si ha $\dim V_0 = \dim \mathrm{Ker}\, A = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 1 = 2$, V_0 è il piano per O di equazione $x + y + z = 0$. Una base per V_0 è la seguente:

$$\mathcal{B}_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) La matrice B è triangolare superiore, i suoi autovalori sono quindi gli elementi sulla diagonale principale. Abbiamo quindi:

$$t_1 = 0 \quad \mu(0) = 2 \qquad t_2 = 3 \quad \mu(3) = 1.$$

Calcoliamo le molteplicità geometriche. Osserviamo che risulta

$$\nu(3) = \dim V_3 = \mu(3) = 1,$$

invece per l'autovalore 0 abbiamo:

$$\nu(0) = \dim V_0 = \dim \mathrm{Ker}\, B = 3 - \mathrm{rg}(B).$$

Osserviamo che $\mathrm{rg}(B) = 2$ se e solo se $k \neq 0$ e che $\mathrm{rg}(B) = 1$ se $k = 0$. Possiamo quindi concludere che:

$$\nu(0) = \dim V_0 = \begin{cases} 1 & \forall\, k \neq 0 \\ 2 & k = 0 \end{cases}.$$

(4) Verifichiamo innanzittutto che le matrici A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico. Dal quesito (1), 3 è autovalore di A con $\mu(3) \geq 1$. Dal quesito (2), 0 è autovalore di A con molteplicità geometrica $\nu(0) = \dim V_0 = 2$. Ricordiamo che la molteplicità geometrica non può superare la molteplicità algebrica, quindi $\mu(0) \geq 2$ e $\mu(0) + \mu(3) = 3$. Gli autoavlori di A sono quindi:

$$t_1 = 3 \;\; \mu(3) = 1 \quad t_2 = 0 \;\; \mu(0) = 2,$$

le matrici A e B hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche, pertanto hanno lo stesso polinomio caratteristico (ricordiamo che la condizione non è sufficiente a garantire la simitudine).

Ricordiamo inoltre che due matrici simili hanno necessariamente lo stesso rango. Risulta $\text{rg}(A) = 1$, e $\text{rg}\, B = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2 & k \neq 0 \end{cases}$, per cui possiamo affermare che se $k \neq 0$ le matrici non sono simili.
Osserviamo che se $k = 0$ anche la matrice B è diagonalizzabile, infatti:

$$\nu(0) + \nu(3) = \dim V_0 + \dim V_3 = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3,$$

le matrici sono quindi simili alla stessa matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, quindi per la proprietà transitiva sono simili. La risposta al quesito è pertanto: A e B sono simili solo per $k = 0$.

Esercizio 6.8. (9 aprile 2010, Appello)
Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3, in funzione del parametro reale h:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 2 & h & 2 \\ 3 & h & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare il rango di A al variare del parametro h:

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 2 & h = 0, 1 \\ 3 & h \neq 1, 0 \end{cases}$$

(2) determinare gli autovalori della matrice A e le loro molteplicità algebriche PER $h = 0$ e PER $h = 1$:

$$h = 0: \ \ \lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}, \ \ \lambda_3 = 2 + \sqrt{3};$$

$$h = 1: \ \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \mu(0) = 2 \\ \lambda_2 = 5 & \mu(5) = 1 \end{cases};$$

(3) POSTO $h = 1$, determinare dimensione, equazione cartesiana e base per ciascun autospazio di A:

$$\dim(V_0) = 1; V_0 \colon x + z = y = 0; \ \mathcal{B}_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(V_5) = 1; \ V_5 \colon 4x - y - z = x - 2y + z = 0; \ \mathcal{B}_{V_5} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\};$$

(4) stabilire se la matrice sia diagonalizzabile per $h = 1$ e per $h = 0$:
per $h = 0$ la matrice è diagonalizzabile, quadrata di ordine 3 ed ha 3 autovalori reali distinti;
per $h = 1$ la matrice non è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 6.9. (19 febbraio 2009, Appello)
Si considerino la matrice A dipendente dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare gli autovalori della matrice A:

$$t_1 = 1 \ \mu(1) = 1 \quad t_2 = 2 \ \mu(2) = 2;$$

(2) determinare le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori, al variare di k:

$$\nu(1) = \dim V_1 = 1 \quad \nu(2) = \dim V_2 = \begin{cases} 2 & k = -1 \\ 1 & k \neq -1 \end{cases};$$

(3) determinare per quali valori di k la matrice A è diagonalizzabile:

$$A \text{è diagonalizzabile per } k = -1;$$

(4) posto $k = 1$, determinare una base per ciascuno degli autospazi:

$$\mathcal{B}_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathcal{B}_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ESERCIZIO 6.10. (19 febbraio 2009, Appello)
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = -1 \ \mu(-1) = 1 \quad \lambda_2 = 3\mu(3) = 2;$$

(2) scrivere per ogni autovalore le equazioni del corrispondente autospazio:

$$V_{-1} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 0, x + 2y + 4z = 0\right\};$$

$$V_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0, y = 0\right\};$$

(3) stabilire se gli autovalori di A sono regolari (cioè la molteplicità algebrica coincide con la molteplicità geometrica). Giustificare la risposta.

$$\lambda_1 = -1 \text{ è regolare: } \mu(-1) = \nu(-1) = 1,$$

$$\lambda_2 = 3 \text{ non è regolare: } \mu(3) = 2 \neq \nu(2) = 1;$$

(4) scrivere una matrice B avente lo stesso polinomio caratteristico di A, che non sia simile ad A:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.11. (16 settembre 2009, Appello)
Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare $|A|^5 = 0$;
(2) determinare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = 0 \ \lambda_2 = \sqrt{3} \ \lambda_3 = -\sqrt{3} \quad \mu(0) = \mu(\sqrt{3}) = \mu(-\sqrt{3}) = 1;$$

(3) stabilire se il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A, giustificare la risposta. $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A: $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{v}$ è autovettore con autovalore 0;
(4) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2-\sqrt{3}} \\ \frac{2}{1-\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2+\sqrt{3}} \\ \frac{2}{1+\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 6.12. (23 novembre 2009, Appello straordinario)
Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare $\det A^7 = 0$;
(2) determinare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = 0 \, \mu(0) = 2 \, , \lambda_2 = 1 \, \mu(1) = 1 \, ;$$

(3) determinare le equazioni per l'autospazio di ciascun autovalore trovato:

$$\begin{aligned} V_0 : \quad & x - y = z = 0 \, , \\ V_1 \quad & x = y = 0 \, ; \end{aligned}$$

(4) stabilire se la matrice è diagonalizzabile, motivando la risposta.
Non è diagonalizzabile, perché $\dim V_0 + \dim V_1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Esercizio 6.13. (11 febbraio 2010, Appello)
Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare gli autovalori della matrice A e le loro molteplicità algebriche:

$$\lambda_1 = 0, \ \mu(0) = 1 \qquad \lambda_2 = 2, \ \mu(2) = 3;$$

(2) determinare dimensione ed equazioni cartesiane di ciascun autospazio di A: $\nu(0) = \dim V_0 = 1, \quad \nu(2) = \dim V_2 = 2;$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y = z = t = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = y = 0 \right\};$$

(3) determinare una base per ciascun autospazio di A:

$$\mathcal{B}_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

(4) stabilire se la matrice A è diagonalizzabile, giustificare la risposta.
NO: $\nu(2) = 2 \neq \mu(2) = 3$.

Esercizio 6.14. (14 settembre 2010, Appello)
Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4 dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare gli autovalori della matrice A:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3;$$

(2) determinare per quale/i valori di h la matrice A è diagonalizzabile:

$$h = 0;$$

(3) posto $h = 0$, determinare dimensione, equazioni cartesiane ed una base per ciascun autospazio di A:

$$\dim(V_{-1}) = 1, \ V_{-1} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z + t = 0\}, \ \mathcal{B}_{V_{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(V_1) = 1,\ V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=z=t=0\},\ \mathcal{B}_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(V_3) = 2,\ V_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=z-t=0\},\ \mathcal{B}_{V_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

(4) determinare per quale valore di h esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A: $h = 0$.

CAPITOLO 7

Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ e ortogonalità

Gli esercizi proposti in questa sezione si riferiscono alle proprietà metriche degli spazi $\mathbb{R}^n$ in cui è stato fissato un prodotto scalare.

ESERCIZIO 7.1. Si consideri la matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che A è una matrice ortogonale di ordine 3;
(2) trovare una matrice ortogonale B, di ordine 3, $B \neq A$, $B \neq I_3$, con $\det B = \det A$;
(3) trovare una matrice ortogonale $D \neq -I_3$, con $\det D = \det(-I_3)$.

RISOLUZIONE. (1) La matrice A è ortogonale se e solo se le sue colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo:

$$\langle A^1, A^1 \rangle = 0^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = 1,$$

$$\langle A^2, A^2 \rangle = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1,$$

$$\langle A^3, A^3 \rangle = 0^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 + (-\frac{1}{2})^2 = 1,$$

$$\langle A^1, A^2 \rangle = 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 0 = 0,$$

$$\langle A^1, A^3 \rangle = 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.(-\frac{1}{2}) = 0,$$

$$\langle A^2, A^3 \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 0.(-\frac{1}{2}) = 0.$$

Poiché i vettori $\{A^1, A^2, A^3\}$ sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ la matrice A è ortogonale.
(2) Calcoliamo il determinante di A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1.$$

Osserviamo che se scambiamo tra loro i vettori A^1, A^2, A^3 otteniamo ancora una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo, ad esempio, la matrice B ottenuta da A con due scambi di colonne

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

la matrice è ortogonale, risulta $B \neq A$ e $B \neq I_3$, infine si ha:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{vmatrix} = 1.$$

Una matrice che risponde al quesito è quindi la seguente:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(3) Osserviamo che dalla proprietà di linearità rispetto alle colonne del determinante si ha:

$$\det(-I_3) = (-1)^3 \det I_3 = -1.$$

Per ottenere una matrice ortogonale con $\det D = -1$, possiamo procedere come nel punto precedente, semplicemente operando un solo scambio:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

é immediato verificare che $\det D = -1$ e $D \neq -I_3$.

Esercizio 7.2. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino i vettori

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare l'angolo determinato dai vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$;
(2) determinare la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{v}$ lungo $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$;
(3) trovare una base ortogonale $\mathcal{B}_1$ di $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$;
(4) trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ contenente la base $\mathcal{B}_1$.

Risoluzione. (1) Indichiamo con θ l'angolo convesso formato dai vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Ricordiamo che risulta:

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}||},$$

abbiamo

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 1{\cdot}1+1{\cdot}0+1{\cdot}1+1{\cdot}0 = 2 \quad ||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{4} = 2 \quad ||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$

da cui otteniamo:

$$\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \theta = \frac{1}{4}\pi.$$

(2) Scegliamo un versore appartenente a $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$, ad esempio il vettore ottenuto moltiplicando $\boldsymbol{u}$ per il numero reale $\frac{1}{||\boldsymbol{u}||}$:

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}.$$

Il vettore proiezione ortononale di $\boldsymbol{v}$ su $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}) = \mathrm{Span}(\hat{\boldsymbol{u}})$ è il vettore:

$$\boldsymbol{v}' = \langle \boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{u}} \rangle \, \hat{\boldsymbol{u}},$$

si ha

$$\langle \boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{u}} \rangle = \left\langle \boldsymbol{v}, \frac{1}{2}\boldsymbol{u} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = 1.$$

Possiamo concludere che:

$$\boldsymbol{v}' = \hat{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}.$$

(3) Basta prendere i vettori $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Infatti i vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ appartengono al sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, inoltre è immediato verificare che risulta $\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$. Una base ortogonale per $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ è la seguente:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

(4) Consideriamo il complemento ortogonale W del sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$:

$$W = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \boldsymbol{w} \perp (\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

si ha $\dim W = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 4 - 2 = 2$. Inoltre si ha:

$$\boldsymbol{w} \in W \iff \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v}.$$

Posto $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, le condizioni di perpendicolarità danno le equazioni di W:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che i vettori $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono vettori di W e sono ortogonali: $\boldsymbol{w}_1 \perp \boldsymbol{w}_2$. Quindi sono una base ortogonale di W:

$$\mathcal{B}_2 = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}.$$

Poiché risulta $W = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^{\perp}$ si ha:

$$W \oplus \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathbb{R}^4,$$

quindi l'unione delle basi $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è una base $\mathcal{B}$ ortogonale di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 7.3. (4 febbraio 2009, Prova in itinere)
Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + 2z = y + 3z + t = 0 \right\}.$$

(1) Determinare le dimensioni dei sottospazi U e $U^{\perp}$;
(2) determinare le equazioni ed una base di $U^{\perp}$;
(3) trovare una base ortonormale di U.

Risoluzione. (1) Il sottospazio U è lo spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}_2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\operatorname{rg}(A) = 2$, si ha $\dim U = 4 - \operatorname{rg}(A) = 4 - 2 = 2$.
Ricordiamo che l'insieme $U^{\perp} \subset \mathbb{R}^4$, definito nel seguente modo:

$$U^{\perp} = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{u}, \quad \forall \boldsymbol{u} \in U\},$$

é un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ ed è un complementare di U, cioè la somma di U e $U^{\perp}$ è diretta e coincide con lo spazio $\mathbb{R}^4$, in simboli:

$$U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^4,$$

per questo motivo $U^{\perp}$ è detto complemento ortogonale di U. Dalla formula scritta sopra abbiamo che

$$\dim U^{\perp} = \dim \mathbb{R}^4 - \dim U = 4 - 2 = 2.$$

Possiamo quindi concludere che $\dim U = \dim U^{\perp} = 2$.

(2) Fissata una base $\mathcal{B}_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ di U, ricordiamo che per ogni $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4$ si ha:

$$\boldsymbol{w} \in U^\perp \iff \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{u}_2.$$

Cerchiamo quindi una base per U, risolviamo dapprima il sistema rispetto alle variabili x e y:

$$\begin{cases} x + y = -2z \\ y = -3z - t \end{cases} \implies \begin{cases} x = z + t \\ y = -3z - t. \end{cases}$$

Otteniamo quindi la seguente rappresentazione parametrica dei vettori di U:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = -3\alpha - \beta \\ z = \alpha \\ t = \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Una base per U è la seguente:

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le equazioni di $U^\perp$ si ottengono quindi dalle due condizioni di ortogonalità $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1 \rangle = 0$:

$$U^\perp \colon \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}.$$

Per determinare una base di $U^\perp$, risolviamo il sistema rispetto alle variabili t e z:

$$\begin{cases} z = 3y - x \\ t = y - x \end{cases},$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 3\beta - \alpha \\ t = \beta - \alpha, \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Una base per $U^\perp$ è la seguente:

$$\mathcal{B}_{U^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) Per trovare una base ortonormale di U applichiamo il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B}_U$ trovata nel punto precedente:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle} \boldsymbol{u}_1.$$

Calcoliamo i prodotti scalari:

$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle = 1.1 + (-3)(-1) + 1.0 + 0 \cdot 1 = 4 \quad \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle = 1^2 + (-3)^2 + 1^2 + 0^2 = 11,$

da cui otteniamo:

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{4}{11}\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} \\ \frac{1}{11} \\ -\frac{4}{11} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ costituiscono una base ortogonale di U, per avere una base ortonormale basta normalizzare i vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$:

$$\frac{1}{||\boldsymbol{v}_1||}\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\boldsymbol{v}_1 \quad \frac{1}{||\boldsymbol{v}_2||}\boldsymbol{v}_2 = \sqrt{\frac{11}{17}}\boldsymbol{v}_2.$$

Una base ortonormale di U è quindi la seguente:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{11}{17}} \begin{pmatrix} \frac{7}{11} \\ \frac{1}{11} \\ -\frac{4}{11} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 7.4. (4 febbraio 2009, Appello)

Fissati in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino i vettori $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e i seguenti sottospazi:

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + t = 0 \right\}, \quad U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2),$$

determinare:

(1) la dimensione di V e una base di V;
(2) la dimensione dei sottospazi $U \cap V$ e $U + V$;
(3) la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{u}_2$ lungo $\operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1)$;
(4) una base ortonormale per U.

Risoluzione. (1) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da un'unica equazione lineare (iperpiano), quindi la sua dimensione è $\dim V = 4 - 1 = 3$. Per trovare una base di V, cerchiamo una rappresentazione parametrica per suoi vettori. Ricaviamo la variabile t dall'equazione di V: $t = -x - y$, le variabili x, y e z

sono libere, otteniamo quindi:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \\ t = -\alpha - \beta \end{cases}.$$

I vettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono un sistema di generatori di V. É immediato verificare che sono linearmente indipendenti, uindi i vettori sono una base di V:

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Il sottospazio $U + V$ è la somma dei sottospazi U e V. Ricordiamo che per ottenere un sistema di generatori di $U + V$ basta fare l'unione di un sistema di generatori di U e di un sistema di generatori di V, in questo caso:

$$U + V = \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2).$$

Per calcolare la dimensione di $U + V$ calcoliamo il rango della seguente matrice di colonne $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta $\operatorname{rg}(A) \geq 3$, infatti i vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Infine si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

da cui ricaviamo che $\operatorname{rg}(A) = 4$ e i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1\}$ sono linearmente indipendenti. Abbiamo quindi che $\dim(U+V) = 4$, cioè $U + V = \mathbb{R}^4$. Applichiamo ora la formula di Grassmann:

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U + V) + \dim(U \cap V),$$

poiché $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ e i vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ sono linearemente indipendenti si ha $\dim U = 2$, inserendo nella formula le dimensioni di U, V e $U+V$ otteniamo che $\dim(U \cap V) = 1$. La risposta al quesito è la seguente:

$$\dim(U + V) = 4 \quad \dim(U \cap V) = 1.$$

(3) Ricordiamo che la proiezione ortogonale $\boldsymbol{u}_1'$ di $\boldsymbol{u}_1$ sul sottospazio Span$(\boldsymbol{u}_2)$ è il seguente vettore di Span$(\boldsymbol{u}_2)$:

$$\boldsymbol{u}_1' = \frac{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 \rangle}\boldsymbol{u}_2.$$

Abbiamo:

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 \rangle = 1^2 + 1^2 = 2 \quad \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle = (1.0 + 1.1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = 1,$$

da cui otteniamo il vettore proiezione ortogonale di $\boldsymbol{u}_1$:

$$\boldsymbol{u}_1' = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(4) Osserviamo che i vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ non sono ortogonali, infatti risulta $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle = 1 \neq 0$. Possiamo ottenere una base ortogonale di U applicando il processo di ortogonalizzazione ai vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$:

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_1',$$

otteniamo quindi i vettori:

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Per ottenere una base ortonormale basta normalizzare i vettori ottenuti, cioè moltiplicarli per l'inverso della loro norma:

$$\frac{1}{||\boldsymbol{w}_1||}\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1 \quad \frac{1}{||\boldsymbol{w}_2||}\boldsymbol{w}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\boldsymbol{w}_2.$$

Una risposta al quesito è quindi la seguente:

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 7.5. (19 febbraio 2009, Appello)
Fissati in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si consideri il seguente sottospazio:

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \quad x - y + z + 3t = 0 \right\}.$$

Determinare:

(1) la dimensione di V;
(2) una base ortogonale di V;
(3) le equazioni del complemento ortogonale $V^\perp$ di V;

(4) una base ortonormale per $V^\perp$.

RISOLUZIONE. (1) V è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da un'unica equazione lineare (iperpiano), quindi la sua dimensione è $\dim V = 4 - 1 = 3$.
(2) Per trovare una base di V, cerchiamo una rappresentazione parametrica per suoi vettori. Ricaviamo la variabile x dall'equazione di V: $x = y - z - 3t$, le variabili y, z e t sono libere, otteniamo quindi:

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta - 3\gamma \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = \gamma \end{cases}.$$

I vettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono un sistema di generatori di V. É immediato verificare che sono linearmente indipendenti, quindi i vettori sono una base di V:

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per ottenere una base ortogonale di V applichiamo ai vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schimdt:

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} \boldsymbol{w}_1 \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle} \boldsymbol{w}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle} \boldsymbol{w}_1.$$

Abbiamo:

$$\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 2, \quad \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle = -1,$$

da cui otteniamo:

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo:

$$\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \frac{3}{2} \quad \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \frac{3}{2} \quad \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle = -3,$$

da cui otteniamo:

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{w}_2 + \frac{3}{2} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base ortogonale per V è la seguente:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(3) Un vettore $X \in \mathbb{R}^4$ appartiene al sottospazio $V^\perp$ se e solo se $X \perp \boldsymbol{v}_1$, $X \perp \boldsymbol{v}_2$, $X \perp \boldsymbol{v}_3$, cioè X verifica le seguenti condizioni:

$$\langle X, \boldsymbol{v}_1\rangle = \langle X, \boldsymbol{v}_2\rangle = \langle X, \boldsymbol{v}_3\rangle = 0.$$

Otteniamo quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + z = 0 \\ -3x + t = 0 \end{cases}.$$

(4) Risulta $\dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim V = 4 - 3 = 1$. Un generatore per $V^\perp$ si ottiene risolvendo il sistema lineare nelle variabili y, z e t:

$$\begin{cases} y = -x \\ z = x \\ t = 3x \end{cases},$$

da cui ricaviamo la rappresentazione parametrica dei vettori di $V^\perp$:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \\ t = 3\alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Un base per il sottospazio $V^\perp$ è costituita dal seguente vettore:

$$X_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix};$$

per ottenere una base ortonormale basta normalizzare il vettore X_1, ossia moltiplicarlo per l'inverso della sua norma:

$$\langle X_1, X_1\rangle = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2 = 12, \implies ||X_1|| = 2\sqrt{3}.$$

Una base ortonormale per $V^\perp$ è la seguente:

$$\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Esercizio 7.6. (30 gennaio 2008, Appello)

Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed il seguente sottospazio:

$$V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}\}.$$

Determinare:

(1) la dimensione di V e le equazioni cartesiane di V;
(2) una base ortogonale per V;
(3) le equazioni di $V^\perp$.

Risoluzione. (1) Il sottospazio V è il complemento ortogonale del sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$:

$$V = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})^\perp.$$

Infatti sia $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u}$ per cui si ha

$$\langle \boldsymbol{v}, \alpha\boldsymbol{u} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle ,$$

possiamo quindi concludere che un vettore $\boldsymbol{v}$ è perpendicolare ad ogni vettore di $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$ se e solo se $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{u}$. Risulta quindi

$$\dim V = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}) = 4 - 1 = 3.$$

Sia $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, dalla condizione di perpendicolarità abbiamo:

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = x + y - z + t = 0,$$

il sottospazio è definito dall'unica equazione $x + y - z + t = 0$.
(2) Per ottenere una base di V esplicitiamo l'equazione trovata: $z = x + y + t$. I vettori di V si possono scrivere in forma parametrica nel seguente modo:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha + \beta + \gamma \\ t = \gamma \end{cases} , \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Una base per V è la seguente:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per avere una base ortogonale applichiamo Gram-Schmidt.

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle}\boldsymbol{w}_1 \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle}\boldsymbol{w}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle}\boldsymbol{w}_1.$$

Risulta:

$$\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 1 \quad \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 2,$$

da cui otteniamo

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta:

$$\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \frac{3}{2} \quad \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1 \rangle = 1,$$

da cui otteniamo:

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{1}{3}\boldsymbol{w}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base ortogonale per V è la seguente:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) Il sottospazio complemento ortogonale di V è il sottospazio:

$$V^\perp = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v}, \forall \boldsymbol{v} \in V\},$$

risulta $\dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim V = 4 - 3 = 1$. Osserviamo che $\boldsymbol{u} \in V^\perp$, quindi il sottospazio $V^\perp$ coincide con il sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$. Per ottenere le sue equazioni, ricordiamo che un vettore $\boldsymbol{w}$ è perpendicolare a tutti i vettori di V se e solo se è perpendicoalre ai vettori di una base di V:

$$\boldsymbol{w} \in V^\perp \iff \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_3 \rangle = 0.$$

Sia $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ risulta:

$$\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1 \rangle = x + z, \quad \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_2 \rangle = y + z, \quad \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_3 \rangle = z + t,$$

da cui otteniamo le seguenti equazioni per $V^\perp$:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 7.7. (6 luglio 2009, Appello)
Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si consideri il seguente sottospazio:

$$U = \left\{ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \colon x + 2y - 3z = 0, t - z = 0 \right\},$$

ed i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare:

(1) la dimensione di U:

$$\dim U = 2;$$

(2) una base ortogonale di U:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\};$$

(3) le equazioni di $U^\perp$:

$$x + y + z + t = 0; 2x - y = 0.$$

(4) per quali valori di h, $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ è un sottospazio di U:

$$h = 1.$$

Esercizio 7.8. (16 settembre 2009, Appello)
Fissati in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino i vettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ e } \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

indichiamo con $V = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ il sottospazio generato dai due vettori. Sia inoltre U il sottospazio definito mediante equazioni cartesiane:

$$U = \left\{ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - t - z = 0\,,\; z = y + t \right\},$$

(1) Determinare la dimensione di $V^\perp$:

$$\dim(V^\perp) = 2;$$

(2) scrivere le equazioni cartesiane di V:

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - t - 2z = 0\,,\ z = y + t \right\},$$

(3) trovare una base di U:

$$\mathcal{B}(U) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(4) sia $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} h \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; stabilire per quale valore di h si ha $\boldsymbol{w} \in V$:

$$h = 4$$

(5) calcolare la dimensione di $U + V$:

$$\dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Esercizio 7.9. (23 novembre 2009, Appello straordinario)

Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino i vettori $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; siano $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ e $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y = z = 0 \right\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Determinare:

(1) le equazioni cartesiane di U:

$$z - y = t = 0\,.$$

(2) una base di $V^\perp$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

(3) la dimensione di $U + V$ e la dimenione di $U \cap V$:

$$\dim(U + V) = 4 \quad \dim(U \cap V) = 0;$$

(4) una base di $U+V$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

ESERCIZIO 7.10. (14 settembre 2010, Appello)
Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si consideri il seguente sottospazio:

$$U=\{\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\colon x-2y+3z=z-t=0\}.$$

Determinare:

(1) la dimensione di U:

$$\dim U=2;$$

(2) una base ortogonale di U:

$$\mathcal{B}_U=\left\{\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\11\\6\\6\end{pmatrix}\right\}$$

(3) le equazioni di $U^\perp$:

$$U^\perp=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,3x-z-t=2x+y=0\}$$

(4) una base di di $U^\perp$:

$$\mathcal{B}_{U^\perp}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$$

CAPITOLO 8

Forme quadratiche e coniche

Gli esercizi proposti in questa sezione si riferiscono allo studio delle forme quadratiche, alle loro applicazioni, soprattutto nello studio delle coniche.

Esercizio 8.1. (4 febbraio 2009, Prova in itinere)
Si consideri la seguente forma quadratica reale $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, in funzione del parametro reale k:

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 - 2kxy + y^2 + kz^2.$$

(1) Scrivere Q in forma matriciale;
(2) determinare per quali valori di k la forma Q è definita positiva:
(3) posto $k = 1$, scrivere un'equazione canonica per Q;
(4) scrivere la trasformazione ortogonale $X = MX'$ che riduce Q alla forma canonica trovata nel punto precedente.

Risoluzione. (1) Indichiamo con X un vettore di $\mathbb{R}^3$, la forma matriciale di $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è del seguente tipo:

$$Q(X) = X^T AX, \quad A \in M_{\mathbb{R}}(3) \quad A = A^T.$$

Possiamo ricavare le entrate della matrice A:
- a_{11} è il coefficiente di x^2: $a_{11} = 1$;
- a_{22} è il coefficiente di y^2: $a_{22} = 1$;
- a_{33} è il coefficiente di z^2: $a_{33} = k$;
- a_{12} è la metà del coefficiente di xy: $a_{12} = a_{21} = -k$;
- a_{13} è la metà del coefficiente di xz: $a_{13} = a_{31} = 0$;
- a_{23} è la metà del coefficiente di yz: $a_{23} = a_{32} = 0$.
La forma matriciale di Q è quindi la seguente:

$$Q(X) = X^T \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} X.$$

(2) Ricordiamo che Q è definita positiva se e solo se risulta $Q(X) > 0$ per ogni vettore non nullo $X \in \mathbb{R}^3$. Una condizione necesssaria e sufficiente affinché Q sia definita positiva è che tutti gli autovalori della matrice A siano strettamente positivi. A tale scopo calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 1-t & -k & 0 \\ -k & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & k-t \end{vmatrix} = (k-t)[(1-t)^2 - k^2],$$

risolvendo l'equazione caratteristica di A otteniamo:

$$k - t = 0 \implies t = k,$$
$$(1-t)^2 = k^2 \implies t = 1 \pm k.$$

Gli autovalori di A devono essere positivi:

$$\begin{cases} k > 0 \\ 1 + k > 0 \\ 1 - k > 0 \end{cases} \implies 0 < k < 1.$$

Concludendo, la forma quadratica è definita positiva se e solo se $0 < k < 1$.
(3) Sia $k = 1$, gli autovalori di A sono quindi $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ e $t_3 = 0$. Ricordiamo che Q è in forma canonica se si rappresenta con una matrice diagonale Δ. Tale rappresentazione si ottiene scegliendo una base ortonormale di autovettori di A, e gli elementi di Δ sono gli autovalori di A. Sia $\mathcal{B}'$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Indichiamo con $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ il vettore delle coordinate di X nella $\mathcal{B}'$: $X' = [X]_{\mathcal{B}'}$. Una forma canonica per Q è la seguente:

$$Q(X') = X'^T \Delta X' = X'^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X' = x'^2 + 2y'^2.$$

(4) Indichiamo con $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che rispetto a $\mathcal{B}$ la forma quadratica si scrive $Q(X) = X^T A X$, rispetto alla base $\mathcal{B}'$ si scrive invece $Q(X') = X'^T \Delta X'$. La trasformazione ortogonale richiesta si riferisce al cambiamento di basi: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Indichiamo con M la matrice ortogonale che realizza il cambiamento di basi: $X = MX'$; le colonne di M sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, formata da autovettori di A. Pertanto occorre trovare gli autospazi di A. Abbiamo:

$$V_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = X\} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I_3)X = \mathbf{0}\},$$

con $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le equazioni di V_1 sono le seguenti: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, una base per V_1 è data dal vettore $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'autospazio associato all'autovalore 2 è:

$$V_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 2X\} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2I_3)X = \mathbf{0}\},$$

con $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le equazioni di V_2 sono $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, una base per V_2 è data dal vettore $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'autospazio associato all'autovalore 0 è:

$$V_0 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = \mathbf{0}\ \} = \operatorname{Ker} A,$$

le equazioni di V_0 sono: $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, una base per V_0 è data dal vettore $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

I vettori $\{X_1, X_2, X_3\}$ sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, infatti poiché la matrice A è reale simmetrica **due autospazi associati ad autovalori distinti sono ortogonali**. Per ottenere una base ortonormale basta normalizzare i vettori ottenuti:

$$\left\{ X_1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} X_2,\ \frac{1}{\sqrt{2}} X_3 \right\}.$$

La trasformazione ortogonale richiesta è la seguente:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X'.$$

Esercizio 8.2. (17 febbraio 2011, Appello)
Si condideri la forma quadratica $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 - y^2 + 4xy.$$

Determinare:

(1) la scrittura matriciale di Q;
(2) il segno della forma quadratica Q;
(3) una forma canonica per Q;
(4) una matrice invertibile M tale che $X' = MX$ porta Q in forma canonica;
(5) per quali valori del parametro k la forma quadratica

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k(x^2 + y^2)$$

é definita positiva.

Risoluzione. (1) Poniamo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la scrittura matriciale di Q è:

$$Q(X) = X^T A X, \quad A \in M_{\mathbb{R}}(2), \quad A = A^T.$$

Calcoliamo i coefficienti della matrice A:
- a_{11} è il coefficiente di x^2, $a_{11} = 2$;
- $a_{12} = a_{21}$ è $\frac{1}{2}$ il coefficiente di xy, $a_{12} = a_{21} = 2$;
- a_{22} è il coefficiente di y^2, $a_{22} = -1$.

La forma matriciale di Q è la seguente:

$$Q(X) = X^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X.$$

(2) Osserviamo che risulta

$$Q(\boldsymbol{e}_1) = Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 > 0,$$

mentre

$$Q(\boldsymbol{e}_2) = Q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 < 0,$$

possiamo quindi concludere che la forma quadratica non è definita.
(3) Ricordiamo che Q è in forma canonica se si rappresenta con una matrice diagonale. Calcoliamo il polinomio cartteristico di A:

$$p_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & -1-t \end{vmatrix} = (2-t)(-1-t)-4 = t^2-t-6 = (t-3)(t+2).$$

Gli autovalori di A sono $t_1 = 3$ e $t_2 = -2$, entrambi semplici. La matrice A, reale simmetrica, è diagonalizzabile, una matrice diagonale simile ad A è la seguente:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La forma canonica corrsipondente è la seguente:

$$Q(X') = X'T \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X' = 3x'^2 - 2y'^2, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

(4) Ricordiamo che Q si rappresenta in forma canonica se la base fissata in $\mathbb{R}^2$ è una base ortonormale formata da autovettori di A:

$$\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}.$$

Il cambiamento di riferimento $X = MX'$, è quindi quello che realizza il passaggio dalla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ alla base $\mathcal{B}'$, più precisamente si ha:

$$M^1 = [\boldsymbol{v}_1]_{\mathcal{B}} \quad M^2 = [\boldsymbol{v}_2]_{\mathcal{B}}.$$

Calcoliamo le equazioni degli autospazi di A. Per l'autovalore 3 abbiamo:

$$V_3 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mid A\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mid (A - 3I_2)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\},$$

con $(A - 3I_2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, l'equazione di V_3 è $x - 2y = 0$. L'autospazio V_{-2} è la retta per O perpendicolare a V_3, l'equazione di V_{-2} è $2x + y = 0$. Poniamo

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_3, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in V_{-2},$$

i vettori costituiscono una base ortonormale formata da autovettori di A. La matrice cercata è quindi la seguente:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

(5) Consideriamo la forma quadratica

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k(x^2+y^2) = (2+k)x^2 + 4xy + (k-1)y^2,$$

in forma matriciale abbiamo:

$$Q(X) = X^T A_k X = X^T \begin{pmatrix} 2+k & 2 \\ 2 & k-1 \end{pmatrix} X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che la forma quadratica è definita positiva se e solo se gli autovalori della matrice A_k sono strettamente positivi. Inoltre, se indichiamo con α_1 e α_2 gli autovalori di A_k, risulta:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = tr(A_k) = 2k+1, \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \det A_k = (2+k)(k-1) - 4 = k^2 + k - 6.$$

La forma quadratica è definita positiva se e solo se risulta

$$\begin{cases} 2k+1 > 0 \\ k^2+k-6 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k > -\frac{1}{2} \\ k < -3 \cup k > 2 \end{cases} \implies k > 2.$$

Possiamo concludere che la forma quadratica data è definita positiva per $k > 2$.

Esercizio 8.3. (18 febbraio 2008, Appello)
Si consideri la seguente forma quadratica reale $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 2axy + y^2 + az^2,$$

con $a \in \mathbb{R}$.

(1) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma quadratica Q è semi-definita positiva;
(2) posto $a = -1$, scrivere una forma canonica per Q;
(3) posto $a = -1$, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ in cui Q si rappresenta nella forma canonica trovata precedentemente.

Risoluzione. (1) Prima di tutto scriviamo la forma quadratica in forma matriciale. Posto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, si ha:

$$Q(X) = X^T A X, \quad A \in M_{\mathbb{R}}(3), \quad A = A^T,$$

dove la matrice A è la seguente matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomo caratteristico di A:

$$p_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 1-t & a & 0 \\ a & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & a-t \end{vmatrix} = (a-t)[(1-t)^2 - a^2] = (a-t)(1-t-a)(1-t+a).$$

Gli autovalori di A sono quindi:

$$t_1 = a \quad t_2 = 1-a \quad t_3 = 1+a.$$

La forma quadratica è semidefinita positiva se ammette autovalori ≥ 0 ed almeno un autovalore è nullo. Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ 1-a \geq 0 \\ 1+a \geq 0 \end{cases} \implies 0 \leq a \leq 1,$$

infine esiste un autovalore nullo per $a = 0$ o $a = 1$. Cocludendo, la forma è semidefinita positiva per $a = 0$ e $a = 1$.

(2) Sia $a = -1$, gli autovalori di A sono:

$$t_1 = -1 \quad t_2 = 2 \quad t_3 = 0.$$

Una matrice diagonale simile ad A è la seguente:

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

una forma canonica per Q è la seguente:

$$Q(X') = X'^T \Delta X' = -x'^2 + 2y'^2, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

(3) Una base di $\mathbb{R}^3$ in cui Q si rappresenta nella forma canonica precedente è una base ortonormale formata da autovettori di A. L'autospazio associato all'autovalore -1:

$$V_{-1} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (A + I_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\},$$

dove $A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, le equazioni di V_{-1} sono:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Una base ortonormale per V_{-1} è la seguente:

$$\mathcal{B}(V_{-1}) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

L'autospazio associato all'autovalore 2:

$$V_2 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2I_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\},$$

dove $A-2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, le equazioni di V_2 sono:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Una base per ortonormale per V_2 è la seguente:

$$\mathcal{B}(V_2) = \{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

L'autospazio associato all'autovalore 0:

$$V_0 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\},$$

le equazioni di V_0 sono:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Una base per ortonormale per V_0 è la seguente:

$$\mathcal{B}(V_0) = \{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A si ottiene facendo l'unione delle basi trovate per gli autospazi:

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

Esercizio 8.4. (30 gennaio 2008, Appello)
Si consideri la seguente forma quadratica reale $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8x^2 - 6xy.$$

(1) Scrivere un' equazione canonica di Q;
(2) stabilire se Q è definita positiva (o negativa), semidefinita positiva (o negativa), o non definita;
(3) fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ si consideri la conica C di equazione $Q(x, y) = 1$;
   (a) riconoscere C;
   (b) determinare le equazioni degli assi di simmetria di C.

RISOLUZIONE. (1) La forma canonica di Q si ottiene rappresentando la forma quadratica con una matrice diagonale Δ. Tale matrice è una matrice diagonale simile alla matrice A che rappresenta Q nella scrittura data. Iniziamo quindi a scrivere la forma quadratica in forma matriciale. Poniamo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, si ha:

$$Q(X) = X^T AX, \quad A \in M_{\mathbb{R}}(2), \quad A = A^T.$$

Calcoliamo i coefficienti della matrice:

$$a_1 1 = 8, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}(-6) = -3, \quad a_{22} = 0.$$

La matrice A è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = |A - tI_2| = \begin{vmatrix} 8-t & -3 \\ -3 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 8t - 9 = (t-9)(t+1).$$

Gli autovalori di A sono $t_1 = 9$ e $t_2 = -1$. La matrice A, reale simmetrica, è simile alla seguente matrice diagonale:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una forma canonica per Q è la seguente:

$$Q(X') = X'^T \Delta X' = 9x'^2 - y'^2, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

(2) Poiché gli autoavlori di A hanno segno discorde, la forma quadratica Q è non definita. Infatti studiamo il segno di Q in forma canonica:

$$Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 > 0 \quad Q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

(3) La conica C ha equazione: $8x^2 - 6xy - 1 = 0$. Scriviamo la matrice reale simmetrica di ordine 3 associata alla conica. Ricordiamo che:
- a_{11} è il coefficiente di x^2, $a_1 1 = 8$;
- $a_{12} = a_{21}$ è $\frac{1}{2}$ del coefficiente di xy, $a_{12} = a_{21} = -3$;
- $a_{13} = a_{31}$ è $\frac{1}{2}$ del coefficiente di x, $a_{13} = a_{31} = 0$;
- a_{22} è il coefficiente di y^2, $a_{22} = 0$;
- $a_{23} = a_{32}$ è $\frac{1}{2}$ del coefficiente di y, $a_{23} = a_{32} = 0$;
- a_{33} è il termine noto, $a_{33} = -1$.

La matrice associata alla conica è:

$$A' = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Poiché risulta:

$$\det A' = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

la conica è non degenere. Inoltre poiché la forma quadratica Q non è definita, la conica è un 'iperbole. Possiamo concludere che C è un'iperbole non degenere.
(b) Osserviamo che, con il cambiamento di riferimento $X = MX'$, che porta la forma quadratica Q ad assumere una forma canonica, la conica C ha equazione:

$$9x'^2 - y'^2 = 1,$$

assume quindi forma canonica. In questo sistema di riferimento (canonico), la conica risulta simmetrica rispetto agli assi del sistema di riferimento:

$$x' = 0 \quad y' = 0.$$

Le direzioni di tali rette, nel sistema di riferimento iniziale, sono date dai seguenti vettori:

$$M^1 = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ma tali vettori costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A. Possiamo quindi concludere che gli assi di simmetria della conica sono gli autospazi di A. Abbiamo:

$$V_9 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mid A\boldsymbol{v} = 9\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mid (A - 9I_2)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\},$$

dove $A - 9I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$. L'equazione di V_9 è la seguente:

$$x + 3y = 0.$$

Infine, per il teorema spettrale, l'autospazio V_{-1} è la retta per O perpendicoalre a V_9, quindi ha equazione:

$$3x - y = 0.$$

Possiamo concludere che gli assi di simetria della conica hanno equazioni:

$$x + 3y = 0 \quad 3x - y = 0.$$

Esercizio 8.5. (19 febbraio 2009, Appello)
Si consideri la conica di equazione

$$-2y^2 + 2\sqrt{3}xy - 1 = 0$$

(1) Riconoscere la conica,
(2) determinare le equazioni del/degli assi di simmetria,
(3) esplicitare il cambio di riferimento per avere la conica in forma canonica.

Risoluzione. (1) Costruiamo la matrice A che è associata alla conica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{8.1}$$

Il determinante di A è

$$\det(A) = -1 \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -1[0 - (\sqrt{3})^2] = 3 \neq 0$$

quindi la conica non è degenere. Inoltre, il determinante della sottomatrice associata alla forma quadratica è

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -3 < 0 \,,$$

quindi la conica è un'iperbole.
(2) Per trovare gli assi di simmetria basta trovare le direzioni degli autovettori della matrice A_2; cerchiamone gli autovalori. Calcoliamo il polinomio caratteristico e troviamone le radici (sicuramente reali, poiché la matrice è reale simmetrica).

$$\det(A_2 - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2) - 3 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \,,$$

che ci dà i due autovalori

$$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = 1 \,.$$

Cerchiamo un autovettore associato al primo autovalore:

$$(A_2 + 3I_2)X = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Questo si riduce ad un'unica equazione per le componenti incognite dell'autovettore:

$$\sqrt{3}x + y = 0 \,, \tag{8.2}$$

ossia

$$y = -\sqrt{3}x \,.$$

Un autovettore $\boldsymbol{v}_1$ si ottiene ponendo $x = 1$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} . \tag{8.3}$$

Per il secondo autovettore $\boldsymbol{v}_2$ non è necessario alcun calcolo: essendo associato ad un autovalore diverso, deve risultare ortogonale al primo, possiamo scrivere immediatamente:

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{8.4}$$

e direzioni dei due autovettori coincidono con quelle degli assi di simmetria dell'iperbole; poiché mancano i termini lineari, non è necessaria alcuna traslazione: gli assi di simmetria sono, pertanto, le rette passanti per l'origine date da:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \tag{8.5}$$

e

$$y = -\sqrt{3}x\,. \tag{8.6}$$

(3) Una base di autovettori $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ per la nostra matrice si ottiene semplicemente normalizzando i vettori $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$; le loro rappresentazioni nella base canonica originaria sono, dunque:

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

La matrice M di cambio di base che permette di scrivere le coordinate $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in termini delle nuove coordinate $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ è proprio formata da colonne dove si riportano le rappresentazioni nnella vecchia base dei vettori della nuova base:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Mediante la trasformazione $X = MX'$ possiamo esplicitare il cambio di variabili per scrivere la forma quadratica in forma canonica:

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \tag{8.8a}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\,. \tag{8.8b}$$

Si lascia allo studente la verifica che, sostituendo le equazioni precedenti nella scrittura della conica, otteniamo

$$-3(x')^2 + (y')^2 = 1\,,$$

che è la forma canonica della conica.

Esercizio 8.6. (3 luglio 2008, Appello)
Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, si consideri la conica C_1 di equazione:

$$x^2 + 2x + 3y^2 + 6y = 0.$$

(1) Riconoscere la conica C_1;
(2) scrivere le equazioni degli assi di simmetria di C_1;
(3) scrivere l'equazione di un'iperbole C_2, non degenere, avente lo stesso centro di C_1 e passante per O.

Risoluzione. (1) Costruiamo la matrice reale simmetrica di ordine 3 associata alla conica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -21 \neq 0,$$

quindi la conica è non degenere. Inoltre, il determinnate della sottomatrice associata alla froma quadratica è:

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

pertanto possiamo concludere che la conica è un'ellisse.
(2) Ricordiamo che nel sistema di riferimento canonico l'ellisse ammette due assi di simmetria che sono gli assi coordinati. Per ottenere la forma canonica della conica, è necessario ridurre a forma canonica la forma quadratica contenuta nell'equazione della conica. In questo caso la forma quadratica è in forma canonica nel sistema iniziale:

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 3y^3,$$

tuttavia l'equazione di C_1 non è canonica, pertanto è necessaria una traslazione degli assi per ottenerla. Procediamo con il metodo del completamento dei quadrati:

$$(x^2 + 2x + 1) + 3(y^2 + 2y + 1) = 3 + 1 + 3,$$
$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 7,$$

poniamo

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 1 \end{cases},$$

ed otteniamo l'equazione canonica di C_1:

$$X^2 + 3Y^2 = 7.$$

Nel sistema di riferimento canonico gli assi coordinati hanno equazione $X = 0$ e $Y = 0$. Le equazioni degli assi di simmetria della conica nel sistema di riferimeto iniziale sono:

$$a_1 : x + 1 = 0 \quad a_2 : y + 1 = 0.$$

(3) Sia C_2 un'iperbole non degenere che ha lo stesso centro di C_1, il sistema di riferimento canonico di C_1 è canonico anche per la conica C_2. In tale sistema di riferimento C_2 ha equazione del tipo:

$$\frac{1}{a^2}X^2 - \frac{1}{b^2}Y^2 = 1.$$

Nel sistema di riferimento iniziale la conica ha equazione:

$$\frac{1}{a^2}(x+1)^2 - \frac{1}{b^2}(y+1)^2 = 1.$$

La conica passa per l'origine O del sistema di riferimento se e solo se si ha:

$$\frac{1}{a^2}(0+1)^2 - \frac{1}{b^2}(0+1)^2 = 1 \Longrightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1.$$

Scegliamo ad esempio $a^2 = \frac{1}{2}$ e $b^2 = 1$, abbiamo

$$2(x+1)^2 - (y+1)^2 = 1,$$

svolgendo i quadrati e semplificando otteniamo l'equazione di C_2:

$$2x^2 - y^2 + 4x - 2y = 0.$$

Esercizio 8.7. (18 febbraio 2008, Appello)
Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, riconoscere ciascuna delle seguenti coniche e scriverne l'equazione canonica:

(1) $C_1 : 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4 = 0$:
C_1 è un'ellisse non degenere;
un 'equazione canonica di C_1 è: $3X^2 + 2Y^2 = 2$.
(2) $C_2 : 2y^2 + 8y - x + 5 = 0$:
C_2 è una parabola non degenere;
un 'equazione canonica di C_2 è: $Y^2 = \frac{1}{2}X$.

Esercizio 8.8. (6 luglio 2009, Appello)
Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri la conica di equazione

$$y^2 - 2x + 2y + 3 = 0.$$

(1) Riconoscere la conica:
è una parabola;
(2) scrivere l'equazione canonica della conica:

$$Y^2 = 2X, \quad \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1 \end{cases} ;$$

(3) scrivere le equazioni di eventuali assi di simmetria della conica:

$$Y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -1.$$

Esercizio 8.9. (23 novembre 2009, Appello straordinario)
Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ considerare la conica $\mathcal{C}$ di equazione:

$$\mathcal{C} : \; 3x^2 - 4xy + 3y^2 - 1 = 0\,.$$

(1) Classificare la conica $\mathcal{C}$;
è un ellisse;
(2) scrivere le equazioni degli assi di simmetria di $\mathcal{C}$:

$$x - y = 0 \qquad x + y = 0\,;$$

(3) scrivere l'equazione canonica di $\mathcal{C}$, fornendo esplicitamente l'espressione dei cambi di variabile per ottenere tale forma (cambio di base):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$X^2 + 5Y^2 = 1.$$

Esercizio 8.10. (11 febbraio 2010, Appello)
Si consideri la forma quadratica reale $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4z^2.$$

(1) Scrivere la matrice associata a Q nella base standard di $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) scrivere l'equazione canonica di Q:
$$Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2;$$
(3) scrivere l'equazione del cambiamento di base necessario per ottenere la forma canonica:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ z' = z \end{cases}$$

(4) stabilire se Q è definita positiva (o negativa), semidefinita positiva (o negativa), o non definita:
definita POSITIVA.

CAPITOLO 9

Esercizi di riepilogo

Esercizio 9.1. (4 febbraio 2009, Prova in itinere)
Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri l'operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dove $L(\boldsymbol{v})$ è ottenuto dalla rotazione (in senso antiorario) di $\boldsymbol{v}$ di un angolo $\vartheta = \frac{\pi}{6}$.

(1) Scrivere la matrice A associata a L nella base canonica di $\mathbb{R}^2$;

(2) descrivere l' operatore lineare di $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice A^2.

Risoluzione. (1) Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. La matrice A è una matrice quadrata di ordine 2, le sue colonne sono le coordinate delle immagini dei vettori della base rispetto alla base stessa, in formula:

$$A^1 = [L(\boldsymbol{e}_1)]_{\mathcal{B}} \quad A^2 = [L(\boldsymbol{e}_2)]_{\mathcal{B}}.$$

Calcoliamo le immagini dei vettori della base. Il vettore $L(\boldsymbol{e}_1)$ si ottiene ruotando in senso antiorario il versore $\boldsymbol{e}_1$ di un angolo $\frac{\pi}{6}$, quindi abbiamo:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \cos\frac{\pi}{6}\boldsymbol{e}_1 + \sin\frac{\pi}{6}\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2.$$

Analogamente, il vettore $L(\boldsymbol{e}_2)$ si ottiene ruotando in senso antiorario il versore $\boldsymbol{e}_2$ di un angolo $\frac{\pi}{6}$, quindi abbiamo:

$$L(\boldsymbol{e}_2) = -\sin\frac{\pi}{6}\boldsymbol{e}_1 + \cos\frac{\pi}{6}\boldsymbol{e}_2 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2.$$

La matrice A è pertanto la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(2) Calcoliamo la matrice $A^2 = A.A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

L'operatore lineare associato alla matrice A^2 si ottiene componendo L con se stesso:

$$X \to AX \to A(AX) = A^2X \implies \boldsymbol{v} \to L(\boldsymbol{v}) \to L(L(\boldsymbol{v}),$$

lo indichiamo con L^2. Sia ha pertanto che $L^2(\boldsymbol{v})$ si ottiene ruotando $\boldsymbol{v}$ in senso antiorario di un angolo $\vartheta' = \frac{\pi}{3}$. Infatti si ha:

$$L^2(\boldsymbol{e}_1) = \cos\frac{\pi}{3}\boldsymbol{e}_1 + \sin\frac{\pi}{3}\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2,$$

$$L^2(\boldsymbol{e}_2) = -\sin\frac{\pi}{3}\boldsymbol{e}_1 + \cos\frac{\pi}{3}\boldsymbol{e}_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2.$$

Concludendo l'operatore di matrice A^2 è la rotazione in senso antiorario di un angolo $\frac{\pi}{3}$.

Esercizio 9.2. Siano A e B matrici reali quadrate di ordine n, verificare che:

(1) se $X \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di A associato all'autovalore α ed è autovettore di B associato all'autovalore β, allora X è autovettore di $A + B$ associato all'autovalore $\alpha + \beta$;
(2) se $X \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di A associato all'autovalore α, allora per ogni $m \geq 2$, X è autovettore di A^m associato all'autovalore α^m;
(3) sia $|A| \neq 0$: se $X \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di A associato all'autovalore α, allora X è autovettore di A^{-1} associato all'autovalore α^{-1}.

Risoluzione. (1) Poiché X è autovettore di A associato all'autovalore α si ha:

$$AX = \alpha X,$$

poiché X è autovettore di B associato all'autovalore β si ha:

$$BX = \beta X.$$

Abbiamo quindi:

$$(A + B)X = AX + BX = \alpha X + \beta X = (\alpha + \beta)X,$$

da cui deduciamo che X è autovettore di $A+B$ associato all' autovalore $\alpha+\beta$.
(2) Dimostriamo la proprietà per induzione su m. Sia $m = 2$, si ha

$$A^2X = A(AX) = A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha(\alpha X) = (\alpha)^2X,$$

la proprietà è vera.
Supponiamo che la proprietà sia verificata per $m - 1$: $A^{m-1}X = \alpha^{m-1}X$, proviamo che vale per m. Infatti si ha:

$$A^mX = A(A^{m-1}X) = A(\alpha^{m-1}X) = \alpha^{m-1}(AX) = \alpha^{m-1}(\alpha X) = \alpha^mX,$$

che prova la tesi.
(3) Poiché $|A| \neq 0$ la matrice A è invertibile; indicata con A^{-1} l 'inversa di A, si ha

$$I_n = A^{-1} \cdot A.$$

Sia $X \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A associato all'autovalore α, risulta:

$$I_nX = (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}(\alpha X) = \alpha A^{-1}X.$$

Osserviamo che essendo $|A| \neq 0$, si ha $\alpha \neq 0$, si ottiene allora:

$$A^{-1}X = \alpha^{-1}X,$$

quindi X è autovettore di A^{-1} associato all'autovalore α^{-1}.

Esercizio 9.3. (27 gennaio 2010, Appello)
Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matrice reale simmetrica di ordine 2 con autovalori 2 e 3, e tale che $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) Trovare una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A.
(2) Determinare la matrice A.

Risoluzione.
(1) Osserviamo che il testo già ci dice che il vettore $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A relativo all' autovalore 2.
Poichè la matrice ha ordine 2 ed ha due autovalori distinti, $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 3$, possiamo concludere che i due autospazi V_2 e V_3 sono due rette per O, inoltre per il teorema spettrale, sono rette ortogonali. Quindi possiamo scrivere

$$V_2 = \text{Span}(X_1), \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \text{Span}(X_2), \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) Scriviamo le due equazioni che caratterizzano gli autovettori X_1 e X_2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

che si traducono nel seguente sistema nelle incognite a, b, c:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b + c = 2 \\ a - b = 3 \\ b - c = -3 \end{cases} \implies \begin{cases} 2a = 5 \\ 2b = -1 \\ 2c = 5 \end{cases}.$$

Il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$$

e, quindi la matrice richiesta è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9.4. (27 gennaio 2010, Appello)
Si consideri la seguente matrice A di tipo $(2,3)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Trovare una matrice B di tipo $(3,2)$ tale che $A.B = I_2$, B è unica?
(2) verificare che ogni matrice B che soddisfa la relazione $A.B = I_2$, verifica la proprietà:

$$\operatorname{Im} B \cap \operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}.$$

Risoluzione.
(1) Sia $B = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$ $\quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. La condizione richiesta è

$$\begin{aligned} A.B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b+c & d+e+f \\ a+c & d+f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ d+e+f = 0 \\ a+c = 0 \\ d+f = 1 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ b = 1 \\ d+f = 1 \\ e = -1 \end{cases}$$

Le matrici B che soddisfano la richiesta si possono scrivere nel seguente modo:

$$B = \begin{pmatrix} a & d \\ 1 & -1 \\ -a & 1-d \end{pmatrix} \quad a, d \in \mathbb{R}.$$

Possiamo quindi concludere che B non è unica. Verifichiamo che l'insieme di tali matrici U è una varietà lineare di dimensione 2. Infatti abbiamo:

$$\begin{pmatrix} a & d \\ 1 & -1 \\ -a & 1-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & d \\ 0 & 0 \\ -a & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

posto $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, e $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, abbiamo che ogni matrice B di U può essere scritta nel seguente modo:

$$B = B_1 + aB_2 + dB_3, \ a, d \in \mathbb{R},$$

quindi

$$U = B_1 + \mathrm{Span}(B_2, B_3).$$

(2) Anzitutto, ricordiamo che il sottospazio $\mathrm{Ker}\, A$ è il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Ker}\, A = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = \mathbf{0}_2 \},$$

il sottospazio $\mathrm{Im}\, B$ è il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Im}\, B = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists X' \in \mathbb{R}^2 \quad X = BX'\}.$$

Sia $X \in \mathbb{R}^3$, supponiamo che sia $X \in \mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Im}\, B$. Poiché $X \in \mathrm{Ker}\, A$, si ha

$$AX = \mathbf{0}_2.$$

Poiché $X \in \mathrm{Im}\, B$, si ha: $X = BX'$, con $X' \in \mathbb{R}^2$. Sostituendo nella precedente relazione, poiché per ipotesi $A.B = I_2$, abbiamo:

$$AX = A(BX') = (AB)X' = I_2X' = X'.$$

Confrontando le due espressioni scritte otteniamo:

$$X' = AX = \mathbf{0}_2 \implies X' = \mathbf{0}_2.$$

Poiché $X = AX'$, risulta

$$X = A\mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_3,$$

cioé l'unico vettore nell'intersezione è il vettore nullo.

Esercizio 9.5. (27 gennaio 2010, Appello)

Si consideri la seguente matrice quadrata di ordine 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Trovare una matrice 2×2 non nulla B tale che $A \cdot B = O_{2,2}$;
(2) mostrare che il sottoinsieme delle matrici B di ordine 2 tali che $A \cdot B = O_{2,2}$, è un sottospazio di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ e calcolarne la dimensione.

Risoluzione.

(1) La soluzione è simile a quella del tema precedente; una matrice che soddisfi le richieste è ed esempio:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Sia U l'insieme delle matrici

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

che soddisfano la condizione $A \cdot B = O_{2,2}$. Questo si traduce nel seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ -a + c = 0 \\ b - d = 0 \\ -b + d = 0 \end{cases}$$

nelle incognite a, b, c e d. La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che $\text{rg}(A) = 2$, infatti $A_2 = -A_1$ e $A_4 = -A_3$, quindi due equazioni sono superflue:

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b - d = 0 \end{cases} \implies a = c \quad b = d.$$

Le matrici $B \in U$ sono quindi le seguenti:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi U è un sottospazio, precisamente

$$U = \text{Span}(B_1, B_2), \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\{B_1, B_2\}$ sono linearmente indipendenti, la dimensione del sottospazio U è 2.

Esercizio 9.6. (27 gennaio 2010, Appello)

Sia $\mathbb{R}_n[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x a coefficienti reali con grado $\leq n$. Si consideri l'applicazione $L\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_5[x]$ data da:

$$L(p(x)) = (x - 1)p(x).$$

(1) Verificare che L è un'applicazione lineare;
(2) trovare una base per lo spazio $\operatorname{Im} L$;
(3) verificare che $\operatorname{Im} L$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}_5[x]$ dei polinomi che ammettono $x = 1$ come radice.

Risoluzione.

(1) Siano $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_4[x]$, verifichiamo la prima condizione di linearità:

$$L(p(x)+q(x)) = (x-1)(p(x)+q(x)) = (x-1)p(x)+(x-1)q(x) = L(p(x))+L(q(x)).$$

Siano ora $p(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, verifichiamo la seconda proprietà di linearità:

$$L(\lambda p(x)) = (x - 1)\lambda p(x) = \lambda(x - 1)p(x) = \lambda L(p(x)).$$

Quindi possiamo concludere che L è lineare.

(2) Ricordiamo che lo spazio immagine è generato dalle immagini dei vettori di una base dello spazio $\mathbb{R}_4[x]$. Cerchiamo quidi una base dello spazio dei polinomi di grado ≤ 4. Osserviamo che i polinomi:

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$$

sono generatori di $\mathbb{R}_4[x]$, ogni $p(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ si scrive infatti:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x_4, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, è immediato verificare che i polinomi dati sono linearmente indipendenti, quindi sono una base per lo spazio $\mathbb{R}_4[x]$, di conseguenza $\dim \mathbb{R}_4[x] = 5$. Troviamo le immagini dei vettori della base:

$$L(1) = (x-1), \quad L(x) = x(x-1), \quad L(x^2) = x^2(x-1),$$
$$L(x^3) = x^3(x-1), \quad L(x^4) = x^4(x-1).$$

Poichè sono tutti polinomi di grado differente, tali polinomi sono linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base di $\operatorname{Im}(L)$:

$$\mathcal{B} = \left\{(x-1), x(x-1), x^2(x-1), x^3(x-1), x^4(x-1)\right\},$$

risulta quindi $\dim \operatorname{Im} L = 5.$

(3) Verifichiamo che un polinomio $q(x) \in \operatorname{Im} L$ ammette la radice $x = 1$. Infatti, esiste un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ tale che

$$q(x) = (x-1)p(x), \quad p(x) \in \mathbb{R}_4[x].$$

Quindi risulta $q(1) = 0$, e $x = 1$ è una radice di $q(x)$.
Viceversa, verifichiamo che ogni polinomio $q(x) \in \mathbb{R}_5[x]$ che ammette la radice $x = 1$ appartiene allo spazio immagine $\operatorname{Im} L$. Ricordiamo che per il teorema di Ruffini $x = 1$ è una radice di $q(x)$ se e solo se $q(x)$ è divisibile per $x - 1$:

$$q(x) = (x-1)p(x), \quad \deg(p(x)) \leq 4,$$

quindi esiste un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ la cui immagine attraverso l'applicazione L è $q(x)$. Possiamo concludere che:

$$\operatorname{Im} L = \{q(x) \in \mathbb{R}_5[x] \mid q(1) = 0\ \}.$$

Esercizio 9.7. (27 gennaio 2010, Appello)
Considerato lo spazio vettoriale reale $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ delle matrici quadrate reali di ordine 3, sia T il suo sottoinsieme delle matrici simmetriche a traccia nulla:

$$T = \{A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3) \mid \operatorname{tr}(A) = 0,\ A = A^{\mathrm{T}}\}.$$

Mostrare che T è un sottospazio vettoriale, e determinarne dimensione ed una base.

Risoluzione.
Verifichiamo che T è chiuso rispetto alla somma fra vettori e chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$, allora si ha:

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) = 0 + 0 = 0,$$
$$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} = A + B.$$

Inoltre, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$, si ha:

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

$$(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} = \lambda A.$$

Pertanto T è un sottospazio vettoriale di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$.
Una matrice generica di T si può scrivere come

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr}(A) = a + d + f = 0.$$

Ricaviamo $f = -a - d$, ed otteniamo:

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Posto $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, le matrici $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ sono generatori di T. Si verifica che sono linearmente indipendenti, quindi sono una base del sottospazio T. Risulta $\dim(T) = 5$ e una base di T è data da:

$$\mathcal{B}_T = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}.$$

Esercizio 9.8. (27 gennaio 2010, Appello)
Sia $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad L \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare $L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(2) determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

Risoluzione.
(1) Notiamo che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e che conosciamo le immagini degli ultimi due vettori. Per la linearità di L abbiamo

$$L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

(2) Per determinare la matrice associata a L abbiamo bisogno delle immagini dei vettori della base canonica $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che $L(\boldsymbol{e}_1)$ è uno dei dati iniziali, e abbiamo appena trovato $L(\boldsymbol{e}_2)$ nel punto (1). Dobbiamo quindi determinare $L(\boldsymbol{e}_3)$. Osserviamo che il terzo dato iniziale può essere scritto nel seguente modo:

$$L(-2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = -2L(\boldsymbol{e}_1) + L(\boldsymbol{e}_2) + L(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{0}_4,$$

da cui otteniamo

$$L(\boldsymbol{e}_3) = 2L(\boldsymbol{e}_1) - L(\boldsymbol{e}_2) = 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\7\\11\end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che le colonne della matrice rappresentativa richiesta sono le coordinate delle immagini dei vettori della base di $\mathbb{R}^3$:

$$A_L = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\2 & 1 & 3\\3 & -1 & 7\\4 & -3 & 11\end{pmatrix}.$$

Esercizio 9.9. (11 febbraio 2010, Appello)
Si consideri la seguente matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\2 & 1 & 2 & 2\\2 & 2 & 1 & 2\\2 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

(1) Verificare che il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ è un autovettore di A e calcolare l'autovalore corrispondente.
(2) Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, determinare una base ortogonale del sottospazio $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v})^\perp$.
(3) Verificare che U è un autospazio di A e calcolare l'autovalore corrispondente.

Risoluzione. (1) Ricordiamo che un vettore non nullo $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A se e solo se $A\boldsymbol{v} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v})$, calcoliamo il prodotto $A\boldsymbol{v}$:

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^1 + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 7\boldsymbol{v},$$

possiamo concludere che $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A associato all'autovalore 7.
(2) Il sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ è il complemento ortogonale del sottospazio $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v})$:

$$U = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}\}.$$

Risulta:

$$\dim U = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}) = 4 - 1 = 3,$$

quindi U è definito da un 'unica equazione in x, y, z e t, tale equazione si ottiene dalla condizione di perpendicolarità:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \perp \boldsymbol{v} \iff \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \iff x + y + z + t = 0.$$

Una base per il sottospazio U è data dai seguenti vettori:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per trovare una base ortogonale di U basta applicare il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$. Osserviamo che i vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ sono ortogonali, infatti si ha $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle = 0$. Poniamo quindi:

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 \rangle}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle}\boldsymbol{u}_1,$$

abbiamo

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Una base ortogonale per U è la seguente:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) Verifichiamo che ogni vettore di U è un autovettore di A. Sia $\boldsymbol{u} \in U$, calcoliamo il prodotto $A\boldsymbol{u}$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+2z+2t \\ 2x+y+2z+2t \\ 2x+2y+z+2t \\ 2x+2y+2z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+y+z+t)-x \\ 2(x+y+z+t)-y \\ 2(x+y+z+t)-z \\ 2(x+y+z+t)-t \end{pmatrix},$$

ricordiamo che $\boldsymbol{u} \in U$ e quindi $x+y+z+t=0$, abbiamo allora:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -t \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},$$

per ogni vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in U$. Abbiamo quindi verificato che tutti i vettori di U sono autovettori di A associati all'autovalore -1. Verifichiamo ora che U coincide con l'autospazio V_{-1}. Supponiamo che $U \subset V_{-1}$ sia un sottospazio proprio, allora si avrebbe

$$\dim V_{-1} = 4 \implies V_{-1} = \mathbb{R}^4.$$

Ma ció é impossibile, perché $\boldsymbol{v} \notin V_{-1}$, infatti $A\boldsymbol{v} = 7\boldsymbol{v}$. Possiamo quindi concludere che

$$U = V_{-1} \quad \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}) = V_7 \quad V_{-1} \oplus V_7 = \mathbb{R}^4.$$

Esercizio 9.10. (11 febbraio 2010, Appello)
Si considerino le seguenti matrici reali:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che le matrici A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico;
(2) stabilire se le matrici sono simili;
(3) trovare, se esiste, una matrice M invertibile di ordine 3 per cui risulta $A = M^{-1}BM$.

Risoluzione. (1) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A e B:

$$p_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)^2(1-t),$$

$$p_B(t) = |B - tI_3| = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)^2(1-t),$$

osserviamo che risulta $p_A(t) = p_B(t)$.

(2) Ricordiamo che avere lo stesso polinomio caratteristico non è in generale una condizione sufficiente per la similitudine. Vediamo di analizzare più a fondo le matrici A e B ad esempio studiamo se sono diagonalizzabili. Entrambe le matrici hanno gli autovalori seguenti:

$$t_1 = 2 \quad \mu(2) = 2, \quad t_2 = 1 \quad \mu(1) = 1.$$

Osserviamo che gli autospazi associati all'autovalore 1 hanno dimensione 1: $\dim V_{1,A} = \dim V_{1,B} = 1$. Per quanto riguarda l'autovalore 2 abbiamo:

$$V_{2,A} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}\} = \ker(A - 2I_3), \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

risulta $\mathrm{rg}(A-2I_3) = 1$ e quindi $\dim V_{2,A} = \dim \mathrm{Ker}(A-2I_3) = 3-1 = 2$. Poiché risulta $\dim V_{1,A} + \dim V_{2,A} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, la matrice A è diagonalizzabile.
Infine abbiamo:

$$V_{2,B} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid B\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}\} = \ker(B - 2I_3), \quad B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

risulta $\mathrm{rg}(B-2I_3) = 1$ e quindi $\dim V_{2,B} = \dim \mathrm{Ker}(B-2I_3) = 3-1 = 2$. Poiché risulta $\dim V_{1,B} + \dim V_{2,B} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, anche la matrice B è diagonalizzabile.
Possiamo concludere che le matrici A e B sono simili, perché sono simili alla stessa matrice diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Poiché le matrici sono simili, esiste una matrice invertibile M di ordine 3 tale che $A = M^{-1}BM$. Ricordiamo che, poiché A e B sono diagonalizzabili, esistono due matrici invertibili N e P tale che:

$$\Delta = N^{-1}AN = P^{-1}BP, \implies A = (PN^{-1})^{-1}B(PN^{-1}),$$

da cui ricaviamo che $M = PN^{-1}$.
Per trovare le matrici N e P cerchiamo, rispettivamente, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A e B. Osserviamo che risulta:

$$V_{2,A} = V_{2,B} = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix});$$

inoltre

$$V_{1,A} = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \quad V_{1,B} = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

una matrice che diagonalizza A è quindi:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di B è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

una matrice che diagonalizza B è quindi:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $N^{-1} = N$, per cui abbiamo:

$$M = PN^{-1} = PN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9.11. (14 settembre 2010, Appello)
Data la matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Si verifichi che le colonne di A formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$;
(2) si verifichi che per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha $||A\boldsymbol{v}||^2 = 9||\boldsymbol{v}||^2$;
(3) si deduca che se λ è autovalore di A allora $\lambda = 3$ oppure $\lambda = -3$;
(4) si determinino gli autovalori di A.

Risoluzione.
(1) Calcoliamo il determinante di A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$$

possiamo concludere che le colonne di A sono vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ e formano una base di $\mathbb{R}^3$. Basta ora verificare che sono ortogonali:

$$\begin{aligned} \langle A^1, A^2 \rangle &= 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 2 - 4 + 2 = 0 \\ \langle A^1, A^3 \rangle &= 1 \cdot 2 + (-2) \cdot) - 1) + (-2) \cdot 2 = 2 + 2 - 4 = 0 \\ \langle A^2, A^3 \rangle &= 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 4 - 2 - 2 = 0\,, \end{aligned}$$

quindi i vettori sono ortogonali.

(2) Sia
$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$
abbiamo
$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ -2x+2y-z \\ -2x-y+2z \end{pmatrix}.$$
Ora, risulta:
$\|A\boldsymbol{v}\|^2 = (x+2y+2z)^2+(-2x+2y-z)^2+(-2x-y+2z)^2 == 9(x^2+y^2+z^2) = 9\|\boldsymbol{v}\|^2$, per ogni vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

(3) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di A e $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ un autovettore associato a λ. Allora risulta:
$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \implies \|A\boldsymbol{v}\|^2 = \|\lambda\boldsymbol{v}\|^2 = \lambda^2\|\boldsymbol{v}\|^2,$$
dal quesito (2) abbiamo che $\|A\boldsymbol{v}\|^2 = 9\|\boldsymbol{v}\|^2$, risulta quindi:
$$\lambda^2\|\boldsymbol{v}\|^2 = 9\|\boldsymbol{v}\|^2 \implies (\lambda^2-9)\|\boldsymbol{v}\| = 0.$$
Essendo $\boldsymbol{v}$ un autoavettore, si ha $\|\boldsymbol{v}\| \neq 0$, per cui risulta
$$\lambda^2 = 9\,,$$
ossia $\lambda = \pm 3$.

(4) Dal quesito (3) risulta che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di A, allora necessariamente λ è 3 o -3. Per stabilire se $\lambda = 3$ è un autovalore di A, calcoliamo $\det(A-3I_3)$:
$$P_A(3) = |A-3I_3| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$
perchéi sono due colonne uguali. Possiamo concludere che $\lambda = 3$ è un autovalore di A. Calcoliamo ora $\det(A+3I_3)$:
$$P_A(3) = |A+3I_3| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 144 \neq 0,$$
possiamo concludere che $\lambda = -3$ non è un autovalore di A.

Esercizio 9.12. (22 novembre 2010, Appello)
Si consideri il seguente sistema lineare:
$$\begin{cases} 2x-2y-z-t-w = -1 \\ z+2t+w = 2 \\ -6x+z+t+2w = 1 \end{cases}$$

(1) Scrivere la matrice A dei coefficienti del sistema;
(2) discutere la risolvibilità del sistema.
(3) Sia $L_A\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che associa ad ogni vettore $X \in \mathbb{R}^5$ il vettore AX. Trovare una base del nucleo $\operatorname{Ker} L_A$.
(4) Risolvere il sistema.

Risoluzione.
(1) Il sistema dato ha 3 equazioni e 5 incognite. La matrice dei coefficienti del sistema è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) Ricordiamo che un sistema è risolvibile se e solo se risulta $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B)$, dove B è la colonna dei termini noti. Calcoliamo il rango di A. Osserviamo che risulta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

quindi la matrice ha rango 3. La matrice completa $(A|B)$ è di tipo $(3, 6)$, non può avere rango maggiore di 3, poiché A è una sua sottomatrice, possiamo concludere che:

$$\operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(A) = 3.$$

(3) Ricordiamo che si ha:

$$\operatorname{Ker} A = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5 \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_3\},$$

é un sottospazio di dimensione $\dim \operatorname{Ker} A = 5 - \operatorname{rg}(A) = 5 - 3 = 2$. Un sistema di equazioni di $\operatorname{Ker} A$ sono le seguenti:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z - t - w = 0 \\ z + 2t + w = 0 \\ -6x + z + t + 2w = 0 \end{cases}$$

possiamo risolvere rispetto a x, y e z:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = t + w \\ z = -2t - w \\ -6x + z = -t - 2w \end{cases} \implies \begin{cases} y = \frac{1}{6}(w + 2t) \\ z = -2t - w \\ x = \frac{1}{6}(w - t) \end{cases}$$

Una base per $\operatorname{Ker} L_A$ è la seguente:

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4)Ricordiamo che l 'insieme delle soluzioni $\mathcal{V}$ del sistema è una varietà lineare che si ottiene traslando il nucleo di A, più precisamente:

$$\mathcal{V} = x_0 + \operatorname{Ker} A,$$

dove X_0 è una soluzione del sistema. Cerchiamo una soluzione del sistema X_0, poniamo ad esempio $x = y == 0$:

$$\begin{cases} z + t + w = 1 \\ z + 2t + w = 2 \\ z + t + 2w = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 0 \\ t = 1 \\ w = 0 \end{cases} .$$

Il vettore $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione del sistema, le soluzioni del sistema sono i vettori X che si possono scrivere:

$$X = X_0 + X', \quad X' \in \operatorname{Ker} A,$$

quindi

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda\mu \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo la seguente rappresentazione parametrica di $\mathcal{V}$:

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = -6\lambda - 12\mu \\ t = 1 + 6\mu \\ w = 6\lambda \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 9.13. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ una matrice quadrata reale di ordine 2 che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\det A = 2 \quad \operatorname{tr}(A) = 3.$$

(1) Determinare gli autovalori di A;
(2) stabilire se A è diagonalizzabile;
(3) determinare tutte le matrici A **reali simmetriche** che soddisfano le condizioni precedenti ed inoltre hanno un autospazio di equazione

$$x + y = 0.$$

Risoluzione. (1) Ricordiamo che il polinomio caratteristico di una matrice quadrata di ordine 2 è il seguente polinomio di grado 2:

$$P_A(t) = |A - tI_2| = t^2 - (\operatorname{tr}(A))t + \det A.$$

Sostituendo $\det A = 2$ e $\operatorname{tr}(A) = 3$ nel polinomio caratteristico ed uguagliando a zero otteniamo l'equazione di secondo grado:

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

le cui soluzioni sono $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$, entrambe con molteplicità algebrica 1. Gli autovalori di A sono quindi: $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2$ con $\mu(1) = \mu(2) = 1$.
(2) La matrice A ha ordine 2 ed ha 2 autovalori distinti, quindi

$$m(1) + m(2) = 1 + 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2,$$

pertanto la matrice A è sicuramente diagonalizzabile.
(3) Sia A una matrice reale simmetrica di ordine 2, cioé tale che $A^T = A$, che soddisfa le condizioni precedenti. Siano V_1 e V_2 gli autospazi di A associati agli autovalori 1 e 2. Poiché A è reale simmetrica, per il teorema spettrale, gli autospazi V_1 e V_2 sono ortogonali. Sapendo che un autoasapzio di A è la retta di equazione $x + y = 0$, possiamo concludere che gli autospazi sono le rette seguenti:

$$x + y = 0 \quad x - y = 0.$$

Abbiamo due possibilità.
Primo caso:

$$V_1 \colon x + y = 0, \quad V_2 \colon x - y = 0.$$

Risulta $V_1 = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1)$, con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $V_2 = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_2)$, con $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Inoltre si ha:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 &\implies A^1 - A^2 = \boldsymbol{v}_1, \\ A\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_2 &\implies A^1 + A^2 = 2\boldsymbol{v}_2. \end{aligned}$$

Ricaviamo che:

$$\begin{aligned} A^1 &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ A^2 &= \frac{1}{2}(2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e quindi la matrice A è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Secondo caso:

$$V_1 \colon x - y = 0, \quad V_2 \colon x + y = 0.$$

Risulta $V_1 = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1)$, con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $V_2 = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_2)$, con $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Inoltre si ha:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 &\implies A^1 + A^2 = \boldsymbol{v}_1, \\ A\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_2 &\implies A^1 - A^2 = 2\boldsymbol{v}_2. \end{aligned}$$

Ricaviamo che:

$$\begin{aligned} A^1 &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ A^2 &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e quindi la matrice A è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9.14. (12 luglio 2011, Appello)

Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che che $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$.

(1) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Im} L$;

(2) determinare $h \in \mathbb{R}$ in modo che $L\begin{pmatrix}3\\-3+h\\1-h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$;

(3) sapendo inoltre che $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, determinare $L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

(4) scrivere la matrice associata a L nelle basi canoniche.

Risoluzione. (1) Osserviamo che i vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, quindi sono una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$. Poiché risulta $\dim \operatorname{Ker} L = 2$, applicando il teorema delle dimensioni abbiamo:

$$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim \mathbb{R}^3 \implies \dim \operatorname{Im} L = 3 - \dim \operatorname{Ker} L = 3 - 2 = 1.$$

Risulta quindi $\dim \operatorname{Im} L = 1.$

(2) Sia $X \in \mathbb{R}^3$, $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Osserviamo che

$$X \in \operatorname{Ker} L \iff X \in \operatorname{Span}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) \iff \dim \operatorname{Span}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, X) = 2$$

$$\iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\0 & 1 & y\\0 & 1 & z\end{pmatrix} = 2 \iff \begin{vmatrix}1 & 0 & x\\0 & 1 & y\\0 & 1 & z\end{vmatrix} = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione del sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

$$z - y = 0.$$

Il vettore $\begin{pmatrix}3\\-3+h\\1-h\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L$ se e solo se $-3+h = 1-h$, cioé $h = 2$. La risposta al quesito è dunque $h = 2.$

(3) Osserviamo che risulta:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

per la linearità di L abbiamo:

$$L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}.$$

(4) Sia A la matrice associata a L nelle basi canoniche. Ricrodiamo che le colonne di A sono le coordinate, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, delle immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$L(\boldsymbol{e}_2) = L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},$$

$$L(\boldsymbol{e}_3) = L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}.$$

La matrice associata a L, nelle basi canoniche, è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\0 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$