Esercizi di Algebra 2 - 4/6/2022

Esercizio 1. Consideriamo una estensione K/F finita e sia α un elemento di un campo che contiene K. Supponiamo che α sia algebrico su F. Allora

$$[K(\alpha) : K] \leq [F(\alpha) : F], \tag{0.1}$$

$$\operatorname{mcm}\big([K : F], [F(\alpha) : F]\big)\Big|[K(\alpha) : F] \leq [K : F] \cdot [F(\alpha) : F]. \tag{0.2}$$

Più in generale, se abbiamo due estensioni finite E_1/F ed E_2/F, supponiamo $E_1 = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ e $E_2 = F(\beta_1, \ldots, \beta_t)$ e poniamo

$$E_3 := F(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t) = E_1(\beta_1, \ldots, \beta_t) = E_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_s).$$

Allora posto $n_i := [E_i : F]$, si ha

$$\operatorname{mcm}(n_1, n_2)|[E_3 : F] \leq n_1 n_2. \tag{0.3}$$

Dimostrarlo almeno in caratteristica 0. La situazione è riassunta dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
& E_1 \arrow[dr, hook] & \\
F \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & E_3 \\
& E_2 \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Esercizio 2. Sia $f(X) = X^5 - 7$, sia $K = \mathbb{Q}(\zeta_5)$ il quinto campo ciclotomico, $\zeta_5 := e^{2\pi i/5}$. Sia L il campo di spezzamento di f su K.

(1) Determinare $[L : K]$.
(2) Determinare esplicitamente il morfismo $\mathrm{Gal}(L/K) \to S_5$ descrivendo ogni elemento di $\mathrm{Gal}(L/K)$ come permutazione.

Esercizio 3. Sia $p(X) = X^4 + 4X^2 - 2$. Determinare il gruppo di Galois di f sui razionali.

Esercizio 4. Sia $f(X) = X^4 - 3$.

(1) f è irriducibile su $\mathbb{Q}(i)$?
(2) Determinare il gruppo di Galois di f su $\mathbb{Q}(i)$.

Esercizio 5. (Compito del 25 settembre 2020). Sia $f := X^5 + X^2 + 1$.

(1) Dimostrare che f è irriducibile su $\mathbb{Q}$.
(2) Trovare un campo $K \supset \mathbb{Q}$ tale che il gruppo di Galois di f su K sia isomorfo a $\mathbb{Z}/5$.
(3) Dimostrare che $\mathrm{Gal}(f)$ non è abeliano

Esercizio 6. Sia $p(X) = X^4 + 4X - 2$. Calcolare il gruppo di Galois di p.