

Il teorema di Sard

Alessandro Ghigi

25 ottobre 2014

1 Sottoricoprimenti numerabili

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subset X$ un sottospazio. Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una base della topologia di X , allora $\{A_i \cap Y\}_{i \in I}$ è una base per la topologia indotta su Y . In particolare, se X ammette una base numerabile, allora anche Y con la topologia indotta è uno spazio a base numerabile.*

Lemma 1. *Se X è uno spazio topologico, $\mathfrak{B}$ è una base di X e $\mathfrak{A}$ è un ricoprimento aperto di X , allora la famiglia*

$$\mathfrak{B}' := \{B \in \mathfrak{B} : \text{esiste } A \in \mathfrak{A} \text{ tale che } B \subset A\}$$

è ancora una base di X .

Dimostrazione. Se $A \subset X$ è un aperto e $x \in A$, allora esiste $U \in \mathfrak{A}$ tale che $x \in U$. Dunque $x \in A \cap U$ e quindi esiste $B \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in B \subset A \cap U$. Dunque $B \in \mathfrak{B}'$ e A è unione di aperti appartenenti a $\mathfrak{B}'$. $\square$

Teorema 2 (Lindelöf). *Se X ha una base numerabile allora ogni ricoprimento di X ammette un sottoricoprimento numerabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{A}$ un ricoprimento di X e sia $\mathfrak{B}$ una base numerabile di X . Sia $\mathfrak{B}'$ la base costruita nel lemma precedente. Anche $\mathfrak{B}'$ è numerabile. Ma per ogni $B \in \mathfrak{B}'$ esiste $A_B \in \mathfrak{A}$ tale che $B \subset A_B$. Allora la famiglia $\mathfrak{A}' = \{A_B\}_{B \in \mathfrak{B}'}$ è numerabile ed è contenuta in $\mathfrak{A}$. Se $x \in X$, allora esiste $B \in \mathfrak{B}'$ tale che $x \in B$. Dunque $x \in A_B$. Pertanto $\mathfrak{A}'$ è un sottoricoprimento numerabile di $\mathfrak{A}$. $\square$

2 Insiemi di misura nulla

Su $\mathbb{R}^n$ c'è una misura privilegiata, la misura di Lebesgue, che indichiamo con m_n . Su una varietà differenziabile priva di strutture aggiuntive non c'è una misura privilegiata. Tuttavia è possibile definire il concetto di insieme di misura nulla.

Ricordiamo innanzitutto la formula del cambiamento di variabile negli integrali. Se E è un insieme misurabile contenuto in un aperto $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione sommabile e $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ è un diffeomorfismo di classe C^1 allora

$$\int_{\varphi(E)} f(y) dy = \int_E f(\varphi(x)) |\det d\varphi(x)| dx. \quad (1)$$

In particolare

$$m_n(\varphi(E)) = \int_E |\det d\varphi(x)| dx.$$

Pertanto se E ha misura nulla e φ è un diffeomorfismo definito su un intorno di E , allora anche $\varphi(E)$ ha misura nulla.

Definizione 3. Se M è una varietà differenziabile n -dimensionale diciamo che un sottoinsieme $E \subset M$ ha misura nulla se per ogni carta (U, φ) di M si ha $m_n(\varphi(E \cap U)) = 0$.

Lemma 4. L'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

Dimostrazione. Se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sono sottoinsiemi di M^n di misura nulla e (U, φ) è una carta di M ,

$$\varphi(\cup_i E_i \cap U) = \cup_i \varphi(E_i \cap U),$$

dunque

$$m_n(\varphi(E \cap U)) \leq \sum_i m_n(\varphi(E_i \cap U)) = 0$$

perché m_n è subadditiva. Dunque anche $\cup_i E_i$ ha misura nulla. $\square$

Lemma 5. Un insieme $E \subset M$ ha misura nulla se e solo se per ogni $p \in E$ esiste una carta (U, φ) tale che $p \in U$ e $m(\varphi(U \cap E)) = 0$.

Dimostrazione. La condizione è ovviamente necessaria. Vediamo che è sufficiente. Per ogni $p \in M$ fissiamo una carta (U_p, φ_p) tale che $p \in U_p$ e $m(\varphi_p(U_p \cap E)) = 0$. Siccome M ha base numerabile, possiamo estrarre un sottoricoprimento numerabile $\{U_{p_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ del ricoprimento $\{U_p\}_{p \in M}$. Poniamo $U_i := U_{p_i}$ e $\varphi_i = \varphi_{p_i}$. Allora $\varphi_i(U_i \cap E)$ ha misura nulla. Se (U, φ) è una carta qualsiasi su M , l'insieme $\varphi_i(U \cap U_i \cap E)$ ha misura nulla perché è contenuto in $\varphi_i(U_i \cap E)$. Dunque anche $\varphi(U \cap U_i \cap E) = \varphi \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U \cap U_i \cap E))$ ha misura nulla. Ma

$$\varphi(U \cap E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(U \cap U_i \cap E),$$

quindi $m_n(\varphi(U \cap E)) = 0$. □

Lemma 6. *Il complementare di un sottoinsieme di misura nulla $E \subset M$ è denso in M .*

Dimostrazione. Poiché gli aperti coordinati formano una base della topologia di M , è sufficiente provare che ogni aperto coordinato interseca $M \setminus E$. Se (U, φ) è una carta, $m_n(\varphi(U \cap E)) = 0$. Dunque $m_n(\varphi(U \setminus E)) = m_n(\varphi(U)) > 0$, poiché ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ ha misura positiva. Pertanto $\varphi(U \setminus E) \neq \emptyset$ e $U \setminus E \neq \emptyset$. □

3 Il teorema di Sard

Definizione 7. *Sia $f : M \rightarrow N$ è una applicazione liscia fra varietà differenziabili. Diciamo che $x \in M$ è un punto critico di f se $df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ non è suriettivo. L'insieme dei punti critici di f si indica con $\text{Crit}(f)$. $y \in N$ è un valore critico di f se $y \in f(\text{Crit}(f))$. Un punto $y \in N \setminus f(\text{Crit}(f))$ è detto valore regolare di f .*

Teorema 8 (di Sard). *Se $f : M^m \rightarrow N^n$ è una applicazione liscia, allora $f(\text{Crit}(f))$ ha misura nulla. L'insieme dei valori regolari è denso in N .*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $m = \dim M$.

Se $m = n = 0$ non esistono punti critici. Se invece $n > 0$ il risultato è ovvio perché $f(M)$ è un insieme numerabile.

Procediamo supponendo che $m > 0$ e che il risultato sia vero per applicazioni definite su varietà di dimensione $< m$.

Incominciamo dimostrando l'affermazione seguente:

Fatto 9. Se $W \subset \mathbb{R}^m$ è un aperto che contiene il cubo $K = [0, 1]^m$ e $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una applicazione liscia, allora posto $C := \text{Crit}(f) \cap K$ si ha $m_n(f(C)) = 0$.

La dimostrazione si farà in tre tappe, spezzando C , e quindi la sua immagine, in tre pezzi, tutti di misura nulla.

Sia C_i l'insieme dei punti di K dove si annullano tutte le derivate di f fino all'ordine i incluso:

$$C_i = \{x \in K : D^\alpha f(x) = 0, |\alpha| \leq i\}.$$

$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k \supset \dots$ è una successione decrescente di chiusi di K .

Primo passo: $m_n(f(C \setminus C_1)) = 0$.

Sia $x_0 \in C \setminus C_1$. Il differenziale $df_{x_0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ non è nullo, ma non è suriettivo. Possiamo supporre (riordinando le coordinate) che

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \neq 0.$$

Poniamo $g(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_m)$. Allora $g : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ è liscia e la sua jacobiana è

$$Jg(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & * \\ 0 & I_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema della Funzione Inversa esiste un intorno aperto A di x_0 tale che $g(A)$ sia aperto e tale che $g|_A$ sia un diffeomorfismo di A su $g(A)$. Restringendo A possiamo supporre che $g(A) = (a, b) \times U$. Poniamo $h = f \circ g^{-1} : (a, b) \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se $x \in A$ si ha $df_x = dh_{g(x)} \circ dg_x$. Siccome dg_x è un isomorfismo, x è critico per f se e soltanto se $g(x)$ è critico per h . Dunque $g(\text{Crit}(f) \cap A) = \text{Crit}(h)$. Ricordando che $f = hg$ e che $C \subset \text{Crit}(f)$ otteniamo $f(C \cap A) \subset h(\text{Crit}(h))$. D'altro canto se $(t, y) \in (a, b) \times U$ e $x = g^{-1}(t, y)$ si ha $f_1(x) = t$, dunque

$$h(t, y) = f(x) = (t, \varphi(t, y))$$

dove $\varphi = (f_2, \dots, f_n) \circ g$. Poniamo

$$\varphi_t = \varphi(t, \cdot) \quad \varphi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}.$$

Allora

$$Jh(t, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & J\varphi_t(y) \end{pmatrix}.$$

Dunque $(t, y) \in \text{Crit}(h)$ se e solo se $y \in \text{Crit}(\varphi_t)$. Per l'ipotesi induttiva $m_{n-1}(\text{Crit}(\varphi_t)) = 0$, perché il dominio di φ_t ha dimensione $m - 1$. Infine

$$h(\text{Crit}(h)) = \{(t, z) \in \mathbb{R}^n : t \in (a, b), z \in \varphi_t(\text{Crit}(\varphi_t))\}.$$

Dunque applicando il Teorema di Fubini otteniamo

$$m_n(h(\text{Crit}(h))) = \int_a^b m_{n-1}(\varphi_t(\text{Crit}(\varphi_t))) dt = 0.$$

e infine $m_n(f(C \cap A)) = 0$. Possiamo ricoprire $C \setminus C_1$ con una infinità numerabile di aperti come A . Quindi $m_n(f(C \setminus C_1)) = 0$.

Secondo passo: per ogni $k \geq 1$ si ha $m_n(f(C_k \setminus C_{k+1})) = 0$.

Per ogni m -indice α ed ogni $j \in \{1, \dots, m\}$ poniamo

$$g_{\alpha,j} = D^\alpha f_j.$$

Allora $C_k = \{x \in K : g_{\alpha,j}(x) = 0 \text{ per ogni } j \text{ e ogni } \alpha \text{ tale che } |\alpha| \leq k\}$. Poniamo

$$M_{\alpha,j} := \{x \in W : g_{\alpha,j}(x) = 0, dg_{\alpha,j}(x) \neq 0\}.$$

$M_{\alpha,j}$ è una sottovarietà di W di dimensione $m - 1$. Per convincersene basta applicare il teorema del valore regolare alla restrizione di $g_{\alpha,j}$ all'aperto $\{x \in W : dg_{\alpha,j}(x) \neq 0\}$. Vogliamo dimostrare che

$$C_k \setminus C_{k+1} \subset \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{|\alpha|=k} M_{\alpha,j}. \quad (2)$$

Sia $x \in C_k \setminus C_{k+1}$. Poiché $x \notin C_{k+1}$, esistono j e β con $|\beta| = k + 1$ tali che $g_{\beta,j}(x) \neq 0$. Sia $i \in \{1, \dots, m\}$ un indice tale che $\beta_i > 0$. E sia $\alpha = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i - 1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_m)$. Dunque $|\alpha| = k$ e

$$g_{\beta,j}(x) = \frac{\partial}{\partial x^i} D^\alpha f_j(x) = \frac{\partial g_{\alpha,j}}{\partial x^i}(x).$$

Quindi $dg_{\alpha,j}(x) \neq 0$. D'altro canto $g_{\alpha,j}(x) = D^\alpha f_j(x) = 0$, perché $x \in C_k$. Quindi $x \in M_{\alpha,j}$. È così dimostrata la (2). Siccome $C_k \subset \text{Crit}(f)$ e $\text{Crit}(f) \cap M_{\alpha,j} \subset \text{Crit}(f|_{M_{\alpha,j}})$, otteniamo

$$C_k \setminus C_{k+1} \subset \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{|\alpha|=k} \text{Crit}(f|_{M_{\alpha,j}}).$$

Di nuovo possiamo applicare l'ipotesi induttiva: siccome $\dim M_{\alpha,j} = m - 1$, si ha

$$m_n(f(\text{Crit}(f|_{M_{\alpha,j}}))) = 0,$$

e dunque $m_n(f(C_k \setminus C_{k+1})) = 0$.

Terzo passo: se $k > m/n$ allora $m_n(f(C_{k-1})) = 0$. Poniamo

$$C_1 := \sum_{|\alpha|=k} \frac{\max_K |D^\alpha f|}{\alpha!}.$$

Fissato un numero naturale $s > 0$ suddividiamo il cubo unitario K in cubi chiusi di lato 2^{-s} suddividendo ciascun lato in s segmenti di lunghezza 2^{-s} . In questo modo troviamo 2^{sm} cubetti $\{K_j\}_{j=1}^{2^{sm}}$ la cui unione è K . Ciascun cubetto ha diametro $\sqrt{m}2^{-s}$. Poniamo

$$J = \{j : K_j \cap C_{k-1} \neq \emptyset\},$$

e per ogni $j \in J$ scegliamo un punto $x_j \in C_k \cap K_j$. Ricordiamo la formula di Taylor con resto di Lagrange. Sia $A \subset \mathbb{R}^m$ un aperto e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione liscia. Siano $x_0, x \in A$. Se il segmento che congiunge x_0 ed x è contenuto in A , allora

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + R(x; x_0), \quad (3)$$

$$R(x; x_0) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha, \quad (4)$$

dove ξ è un punto che appartiene al segmento congiungente x_0 e x . Fissato $j \in J$ applichiamo la formula con $x_0 = x_j$ e $x \in K_j$. Otteniamo

$$f(x) = f(x_j) + R(x; x_j) = f(x_j) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!} (x - x_j)^\alpha$$

$$|(x - x_j)^\alpha| \leq |x - x_j|^{|\alpha|} = |x - x_j|^k \leq (\sqrt{m}2^{-s})^k$$

$$|f(x) - f(x_j)| \leq C_1 |x - x_j|^k \leq C_2 2^{-sk}$$

$$\text{dove } C_2 := m^{k/2} C_1.$$

Dunque $f(K_j)$ è contenuto nella palla $B(f(x_j), C_2 2^{-sk})$ e pertanto $m_n(f(K_j)) \leq C_3 2^{-snk}$, dove $C_3 = \omega_n C_2^n$ e ω_n indica il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$.

Siccome $C_{k-1} = \cup_{j \in J} (C_{k-1} \cap K_j)$, si ha

$$\begin{aligned} m_n(f(C_k)) &\leq \sum_{j \in J} m_n(f(C_k \cap K_j)) \leq \\ &\leq \sum_{j \in J} m_n(f(K_j)) \leq C_3 2^{-snk} \cdot |J| \leq C_3 2^{-snk} 2^{sm} = C_3 2^{s(m-nk)}. \end{aligned}$$

Poichè $k > m/n$, $\lim_{s \rightarrow \infty} 2^{s(m-nk)} = 0$. Dunque $m_n(f(C_k)) = 0$.

A questo punto scegliamo $k > m/n - 1$.

$$\begin{aligned} C &= (C \setminus C_1) \cup \bigcup_{i=2}^k (C_{i-1} \setminus C_i) \cup C_k \\ f(C) &= f(C \setminus C_1) \cup \bigcup_{i=2}^k f(C_{i-1} \setminus C_i) \cup f(C_k). \end{aligned}$$

Dai tre punti precedenti segue che $m_n(f(C)) = 0$. È quindi sistemato il caso di una applicazione $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ come sopra.

Passiamo al caso generale di una applicazione $f : M^m \rightarrow N^n$ fra varietà qualsiasi. Sia $p \in \text{Crit}(f)$. Scelgo una carta (V, ψ) su N vicino a $f(p)$. Sia (U, φ) una carta vicino a p . Restringendo posso supporre $f(U) \subset V$. Componendo φ con una traslazione ed una dilatazione posso supporre che $\varphi(p) = (1/2, \dots, 1/2)$ e che $\varphi(U) =: W \supset [0, 1]^m$. Sia $\bar{f} := \psi f \varphi^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}^n$. Allora $\text{Crit}(\bar{f}) \cap [0, 1]^m$ ha misura nulla. Dunque lo stesso vale per la sua controimmagine mediante φ , che coincide con $\text{Crit}(f) \cap \varphi^{-1}([0, 1]^m)$. Siccome $\varphi^{-1}([0, 1]^m)$ è un intorno di p e p è arbitrario, applicando il Lemma 5 concludiamo che $\text{Crit}(f)$ ha misura nulla.

□