Esame di Geometria III - 27 febbraio 2015 **6 cfu**

N.B. Motivare adeguatamente tutte le risposte.

Esercizio 1. *Sia G un gruppo di Lie e sia e l'elemento neutro.*

1. *Dimostrare che dato un intorno V di e esiste un intorno U di e tale che per ogni $x, y \in U$, $xy^{-1} \in V$.*

   Svolgimento: *L'applicazione $f : G \times G \to G$, $f(x, y) = xy^{-1}$ è continua, dunque dato un intorno V di $e \in G$ esistono intorni U_1 e U_2 di e tali che $f(U_1 \times U_2) \subset V$. Basta porre $U := U_1 \cap U_2$.*

Sia $\Gamma \subset G$ sottogruppo discreto.

2. *Dimostrare che l'azione di Γ su G per moltiplicazione a sinistra è propriamente discontinua. (Suggerimento: cominciare dal punto e.)*

   Svolgimento: *Siccome Γ è discreto esiste un intorno V di e in G tale $\Gamma \cap V = \{e\}$. Sia U un intorno come nel punto 1. Se $\gamma \in \Gamma$ ed esiste $x \in \gamma U \cap U$, allora $x = \gamma \cdot y$ con $y \in U$. Pertanto $\gamma = xy^{-1} \in V$. Quindi $\gamma = e$. Se $g \in G$ è un punto qualsiasi, consideriamo Ug che è un intorno di g. Se $\gamma \in \Gamma$ e $\gamma \neq e$, allora $\gamma Ug \cap Ug = (\gamma U \cap U)g = \varnothing g = \varnothing$.*

Consideriamo ora il caso particolare in cui G è il gruppo delle matrici 3×3 della forma

$$A(x, y, z) := \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z, \in \mathbb{R},$$

e Γ è il sottogruppo formato dalle matrici con $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

3. *Verificare che G è un gruppo di Lie e che Γ è discreto e chiuso.*

   Svolgimento: *Si può vedere direttamente che $(x, y, z) \mapsto A(x, y, z)$ è un omeomorfismo. Lo si può usare per dare a G una struttura differenziabile e si può verificare direttamente che con questa struttura la moltiplicazione e l'inversione sono applicazioni lisce. Altrimenti si può osservare che G è una sottovarietà e anche un sottogruppo di $\mathrm{GL}(3\mathbb{R})$. In entrambi i casi Γ è chiuso essenzialmente perché $\mathbb{Z}$ è chiuso in $\mathbb{R}$. In realtà è facile dimostrare che ogni sottogruppo discreto di un gruppo di Lie è automaticamente chiuso.*

4. *Si indichi con $M := G/\Gamma$ il quoziente di G per l'azione (a sinistra) di Γ. Si dimostri che M è una varietà differenziabile e che è compatta. (Suggerimento: considerare l'immagine in M del sottoinsieme formato dalle matrici $A(x, y, z)$ con $x, y, z \in [0, 1]$).*

   Svolgimento: *Verifichiamo che M è una varietà applicando il teorema sulle azioni lisce e propriamente discontinue. Resta da controllare che la relazione $R = \{(x, y) \in G^2 : \gamma x = y \text{ per qualche } \gamma \in \Gamma\}$ sia chiusa. Ma $R = f^{-1}(\Gamma)$ dove $f(x, y) = yx^{-1}$. Siccome Γ è chiuso, R è chiusa. Quindi M è una varietà differenziabile.*
   Per la compattezza sia Q l'insieme formato dalle matrici $A(x, y, z)$ con $(x, y, z) \in [0, 1]^3$. Vogliamo mostrare che $\pi(Q) = M$. Infatti data

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{poniamo} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & -[a] & -[b - a[c]] \\ 0 & 1 & -[c] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

   Allora $AB = A(\{a\}, \{b\}, \{c\}) \in Q$. Dunque $\pi(A) = \pi(AB) \in \pi(Q)$.

5. *Sia $\varphi : S^2 \to M$ una applicazione liscia. Dimostrare che φ è omotopicamente banale.*
   Svolgimento: *φ si solleva a G perché $\pi : G \to M$ è un rivestimento e S^2 è semplicemente connessa. Ma $G \cong \mathbb{R}^3$ è contraibile.*

Esercizio 2. *Sia X il bouquet di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e di S^1 e sia x_0 il punto in cui vengono incollati.*

1. *Calcolare $\pi_1(X, x_0)$.*

   Svolgimento: *Per il teorema di Van Kampen $\pi_1(X, x_0) = (\mathbb{Z}/2) * \mathbb{Z}$. Chiamiamo a un generatore di $\mathbb{Z}/2$ e b un generatore di $\mathbb{Z}$.*

2. *Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la proiezione canonica. Sia $f : X \to T^2$ una applicazione continua tale che $f(S^1) \subset \pi(B(0, 1/100))$. Dimostrare che f è omotopicamente banale.*

   Svolgimento: *La restrizione di π a $B(0, 1/100)$ è un omeomorfismo. Dunque $f(S^1)$ è contenuto in $\pi(B(0, 1/100)) \cong B(0, 1/100)$ che è contraibile. Dunque $f_*(b) = 0 \in \mathbb{Z}^2 = \pi_1(T^2)$. Ma anche $f_*(a) = 0$ perché a ha periodo finito. Dunque $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(T^2, f(x_0))$ è il morfismo banale. Quindi f si solleva ed è omotopicamente banale.*