Esercizio 1.

$$\det\begin{pmatrix}0 & 7 & 2\\ 9 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} = -9. \tag{1}$$

Qui basta sviluppare lungo la prima colonna.

Esercizio 2.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

Esercizio 3.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 9 & 0 & 1\\ 6 & -3 & 1\end{pmatrix} = -51. \tag{3}$$

Conviene sviluppare lungo la seconda colonna.

Esercizio 4.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 4 & -1\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix} = -58. \tag{4}$$

Se sviluppiamo lungo la prima riga dobbiamo fare solo 2 determinanti 2×2.

Esercizio 5.

$$\det\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix} = 64. \tag{5}$$

Esercizio 6.

$$\det\begin{pmatrix}2 & -8 & -2\\ 1 & 7 & 3\\ 3 & 4 & -2\end{pmatrix} = -106. \tag{6}$$

Esercizio 7.

$$\det\begin{pmatrix}4 & 4 & -8\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix} = 92. \tag{7}$$

Esercizio 8.

$$\det\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 4 & 4 & -1\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix} = -2. \tag{8}$$

Esercizio 9. *Per quali valori di* $x \in \mathbb{R}$ *la matrice*

$$A(x) := \begin{pmatrix}x & -x & 2\\ x & -x & -1\\ 2x & 2x & -2\end{pmatrix}$$

è invertibile? *Calcoliamo*

$$\det\begin{pmatrix} x & -x & 2 \\ x & -x & -1 \\ 2x & 2x & -2 \end{pmatrix} = 12x^2. \tag{9}$$

Dunque la matrice è invertibile se e soltanto se $x \neq 0$.

Esercizio 10. *Per quali valori di* $x \in \mathbb{R}$ *la matrice*

$$A(x) := \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 4x & -x & -1 \\ 2 & -2x & -2 \end{pmatrix}$$

è invertibile?

$$\det\begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 4x & -x & -1 \\ 2 & -2x & -2 \end{pmatrix} = -24x^2 + 6x = -6x(4x-1). \tag{10}$$

Questo polinomio si annulla per $x = 0$ *e per* $x = 1/4$. *Quindi la matrice* $A(x)$ *è invertibile se e solo se* $x \in \mathbb{R} - \{0, 1/4\}$.

Esercizio 11. *Per quali valori di* $x \in \mathbb{R}$ *la matrice*

$$A(x) := \begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 4x & -x & -1 \\ 2 & -2x & -2 \end{pmatrix}$$

è invertibile?

$$\det\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 4x & -x & -1 \\ 2 & -2x & -2 \end{pmatrix} = -8x^3 + 10x^2 - 2x = -2x(4x^2 - 5x + 1). \tag{11}$$

La matrice $A(x)$ *è invertibile se e solo se* $x \in \mathbb{R} - \{0, 1/4, 1\}$.

Esercizio 12. *Dimostrare che*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a-1)(b-1)(b-a).$$

Possiamo usare la terza riga per ricondurci a una matrice con la prima colonna della forma $(0, 0, 1)$. *Quindi possiamo raccogliere* $(a-1)$ *nella prima riga e* $(b-1)$ *nella seconda. Alla fine basta fare un determinante* 2×2.

Esercizio 13. *Calcolare*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

Procedendo come nell'esercizio precedente si trova

$$\det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a).$$

Esercizio 14.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -8 & 0 & -2\\ 3 & -12 & -1 & -2\\ 4 & -12 & 0 & 0\end{pmatrix} = 0. \tag{12}$$

Facendo una operazione sulle righe (sommare la I alla III) troviamo subito una colonna con tre zeri, quindi ci riconduciamo subito a un determinante 3×3.

Esercizio 15.

$$\det\begin{pmatrix}4 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 8 & -1\\ 4 & 4 & 4 & 0\end{pmatrix} = 0. \tag{13}$$

Con una sola operazione sulle righe possiamo mettere tre zeri in una riga, in modo da ricondurci subito a un determinante 3×3. *Qual è l'operazione? È sostituire la riga IV con IV -2·II.*

Esercizio 16.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 5 & 4 & 4 & -1\\ 2 & -2 & -2 & 3\\ 2 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix} = -54. \tag{14}$$

Se sostituisco la IV riga con IV - 2·I, ottengo tre zeri nella IV riga, e mi riconduco subito a un determinante 3×3.

Esercizio 17.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 5 & 4 & 4 & -1\\ 2 & -2 & -2 & 3\\ 2 & 2 & 8 & 3\end{pmatrix} = 604. \tag{15}$$

Esercizio 18.

$$\det\begin{pmatrix}7 & 7 & -21 & 0\\ 0 & 4 & 4 & -1\\ 2 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = 84. \tag{16}$$

Esercizio 19.

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 4 & 4 & -1\\ 2 & -2 & -2 & 3\\ 2 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = 32. \tag{17}$$

Esercizio 20. *Studiare il sistema $AX = B$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 2$, *mentre* $\operatorname{rg}(A|B) = 3$. *Quindi non esistono soluzioni.*

Esercizio 21. *Studiare il sistema $AX = B$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 6 & 13 & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 9 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -56 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 - t \\ -7/3 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \\ -7/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 22. *Studiare il sistema $AX = B$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -23 & -1 \\ 7 & 1 & -4 & 12 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 - 3t - 5s \\ -11 + 25t + 23s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 25 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 23 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 23. *Studiare il sistema $AX = B$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 10 & -6 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 6 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -41 \\ 1 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 21/8 \\ 33/8 - t \\ -25/8 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/8 \\ 33/8 \\ -25/8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 24. *Studiare il sistema $AX = B$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 & -5 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 17/4 - t \\ -9/4 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 17/4 \\ -9/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 25. *Studiare il sistema $AX = B$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 1 & -3 \\ -5 & 0 & -5 & 5 \\ -3 & 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 13/4 \\ 2-t \\ t \\ 17/4+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/4 \\ 2 \\ 0 \\ 17/4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 26. *Studiare il sistema $AX = B$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 27. *Studiare il sistema $AX = B$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 28. *Studiare il sistema $AX = B$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$