

Note sulle grassmanniane

Francesco Genovese

15/03/2013

1 Definizione

Noi lavoreremo sempre sul campo \mathbb{R} dei numeri reali, ma tutto dovrebbe potersi fare allo stesso modo sul campo \mathbb{C} , con le opportune modifiche. In tutte queste dispense, faremo uso della convenzione di Einstein per le sommatorie (una volta padroneggiata, semplifica di molto le notazioni e i calcoli).

In primissima istanza, diamo la seguente definizione:

Definizione 1.1. Sia n un intero non negativo, e sia k un intero compreso tra 0 e n . Definiamo la *grassmanniana* $\text{Gr}(k, n)$ come l'insieme dei sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n di dimensione k .

L'obiettivo è quello di dare a $\text{Gr}(k, n)$ una struttura di varietà C^∞ (di fatto, sarà addirittura analitica). Per farlo, è opportuno descrivere $\text{Gr}(k, n)$ in termini matriciali, nel senso che stiamo per spiegare. Iniziamo osservando che un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$ di dimensione k è descritto come lo span di una k -upla (w_1, \dots, w_k) di vettori linearmente indipendenti, che a sua volta possiamo descrivere come una matrice $n \times k$, mettendo i vettori w_1, \dots, w_k sulle colonne; tale matrice avrà rango massimo, e viceversa ogni matrice di rango massimo $n \times k$ individua una k -upla di vettori linearmente indipendenti in \mathbb{R}^n . Quando avviene che due k -uple (w_1, \dots, w_k) e (w'_1, \dots, w'_k) identificano lo stesso sottospazio vettoriale W ? Avviene esattamente se valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}v'_i &= \alpha_i^j v_j, \\v_i &= \beta_i^j v'_j,\end{aligned}\tag{1.1}$$

per opportuni scalari α_i^j e β_i^j , per $i = 1, \dots, k$. È facile accorgersi che tale condizione si può tradurre in termini matriciali, come segue. Identificate le k -uple (w_1, \dots, w_k) e (w'_1, \dots, w'_k) rispettivamente alle matrici

$$\begin{aligned}A &= (w_1 | \dots | w_k), \\B &= (w'_1 | \dots | w'_k),\end{aligned}$$

si può verificare che le (1.1) equivalgono esattamente a

$$B = AM,\tag{1.2}$$

ove $M \in \text{GL}(k)$ è una matrice invertibile di ordine k . Questa discussione ci porta finalmente alla definizione “operativa” della grassmanniana, che ha il vantaggio di dirci fin da subito qual è la sua struttura di spazio topologico:

Definizione 1.2. Sia n un intero non negativo, e sia k un intero compreso tra 0 e n . Denotiamo con $\mathcal{X}(k, n)$ il sottoinsieme aperto dello spazio $\mathcal{M}(k, n)$ delle matrici $n \times k^1$ definito dalle matrici di rango massimo, munito della topologia indotta dalla topologia standard euclidea. Definiamo la *grassmanniana* $\text{Gr}(k, n)$ come lo spazio delle orbite (munito della topologia quoziente)

$$\text{Gr}(k, n) = \mathcal{X}(k, n) / \text{GL}(k) \quad (1.3)$$

rispetto all’azione destra di $\text{GL}(k)$ su $\mathcal{X}(k, n)$ definita da $(A, M) \mapsto AM$.

Nota 1.3. Perché $\mathcal{X}(k, n)$ è aperto nello spazio delle matrici? Questo essenzialmente perché l’applicazione determinante è continua. Tale proprietà di continuità va sottolineata, in molti casi è fondamentale, e verrà usata anche nel seguito della nostra trattazione.

Nota 1.4. Poiché $\text{Gr}(k, n)$ è ottenuto come spazio di orbite, la proiezione sul quoziente

$$\pi : \mathcal{X}(k, n) \rightarrow \text{Gr}(k, n) \quad (1.4)$$

è aperta, oltre che continua.

A livello insiemistico, dovrebbe essere chiaro a questo punto che le due definizioni date sopra per la grassmanniana sono essenzialmente equivalenti. D’ora in poi, comunque, con $\text{Gr}(k, n)$ intenderemo sempre la (1.3) della Definizione 1.2. Notiamo, in passant, che $\text{Gr}(1, n+1)$ è esattamente il proiettivo reale $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Inoltre, $\text{Gr}(0, n)$ e $\text{Gr}(n, n)$ coincidono con il singolo punto, e per esse non c’è nulla da dire; d’ora in poi, supporremo $k \in \{1, \dots, n-1\}$, e $n \geq 2$, per evitare i casi banali.

2 L’atlante di $\text{Gr}(k, n)$

La Definizione 1.2 ci permette di dare carte locali per $\text{Gr}(k, n)$ in un modo abbastanza diretto, che ricalca quanto si fa per il proiettivo.

Sia $I = (i_1, \dots, i_k)$ un multi-indice k -dimensionale a valori in $\{1, \dots, n\}$, con $i_r \neq i_s$ per ogni $r \neq s$ (d’ora in poi, diremo semplicemente “multi-indice” intendendo un multi-indice di quella precisa forma). Poniamo

$$U_I = \{A \in \mathcal{X}(k, n) : \det A_I \neq 0\}, \quad (2.1)$$

ove con A_I intendiamo il minore $k \times k$ di A ottenuto selezionando (nell’ordine) le righe i_1, \dots, i_k indicate da I . Poiché $\det(\cdot)$ è continua, U_I è aperto in $\mathcal{X}(k, n)$. Inoltre, è chiaro che gli aperti U_I ricoprono $\mathcal{X}(k, n)$, al variare di tutti i possibili multi-indici I . Dunque, proiettando sul quoziente, otteniamo un ricoprimento aperto (finito)

$$\{\pi(U_I) : I \text{ multi-indice}\}$$

¹Per convenzione, se $k = 0$ oppure $n = 0$ allora $\mathcal{M}(k, n)$ è lo spazio banale.

di $\text{Gr}(k, n)$. Le $\pi(U_I)$ saranno i domini delle nostre carte locali. Iniziamo mostrando un semplice risultato tecnico, che ci fa anche capire quanti sono i parametri necessari a descrivere un elemento di $\text{Gr}(k, n)$, e dunque la dimensione di quest'ultima come varietà.

Lemma 2.1. *Data $A \in U_I$, esiste un'unica matrice \widehat{A} nella stessa orbita di A , tale che $\widehat{A}_I = I_k$, l'identità di ordine k .*

Dimostrazione. Per l'esistenza, basta prendere $\widehat{A} = A(A_I)^{-1}$. Per l'unicità, supponiamo che A_1 e A_2 siano nella stessa orbita di A , e che $(A_1)_I = (A_2)_I = I_k$. In particolare, esiste $M \in \text{GL}(k)$ tale che $A_2 = A_1 M$. Chi è $(A_2)_I = (A_1 M)_I$? In generale, abbiamo

$$(A_1 M)_j^i = (A_1)_s^i M_j^s,$$

dunque, prendendo $i \in I$, scopriamo che

$$(A_1 M)_I = (A_1)_I M. \quad (2.2)$$

Questo implica che

$$I_k = (A_2)_I = (A_1 M)_I = (A_1)_I M = M,$$

cioè $A_1 = A_2$, come volevamo. \square

Il risultato appena sopra ci fa intuire che un elemento di $\text{Gr}(k, n)$ è completamente descritto da una matrice $(n - k) \times k$, ossia da $k(n - k)$ parametri. Più precisamente, per ogni multi-indice I , abbiamo una mappa

$$\varphi_I : \pi(U_I) \rightarrow \mathcal{M}(k, n - k), \quad (2.3)$$

definita come segue. Data, in generale, una matrice $B \in \mathcal{M}(k, n)$, denotiamo con $B_{I^c} \in \mathcal{M}(k, n - k)$ la matrice ottenuta selezionando le righe di B complementari a quelle indicate dal multi-indice I . Allora, poniamo

$$\varphi_I([A]) = \widehat{A}_{I^c},$$

ove $[A] \in \text{Gr}(k, n)$ è l'orbita della matrice A , e \widehat{A} è la matrice ottenuta da A applicando il Lemma 2.1, che dipende solo dall'orbita $[A]$.

Lemma 2.2. *φ_I è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. φ_I è continua, infatti è la mappa indotta sul quoziente dalla funzione $U_I \rightarrow \mathcal{M}(k, n - k)$ definita da $A \mapsto \widehat{A} = A(A_I)^{-1}$, che è sicuramente continua. L'inversa di φ_I è la mappa

$$\psi_I : \mathcal{M}(k, n - k) \rightarrow \pi(U_I), \quad (2.4)$$

ove $\psi_I(B)$ è l'orbita della matrice B' definita da

$$\begin{aligned} (B')_{I^c} &= B, \\ (B')_I &= I_k. \end{aligned}$$

Anche ψ_I è continua, essendo la composizione della funzione continua

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(k, n - k) &\rightarrow U_I, \\ B &\mapsto B' \end{aligned}$$

con la proiezione sul quoziente. A questo punto, si può controllare facilmente che φ_I e ψ_I sono una l'inversa dell'altra. \square

Adesso, è semplice ottenere un atlante per la grassmanniana.

Proposizione 2.3. *Dati due multi-indici I e J con $I \neq J$, le funzioni di transizione $\varphi_I \varphi_J^{-1}$ sono analitiche reali. In particolare,*

$$\{(\pi(U_I), \varphi_I) : I \text{ multi-indice}\} \quad (2.5)$$

è un atlante analitico reale di $\text{Gr}(k, n)$.

Dimostrazione. Basta osservare che $\varphi_I \varphi_J^{-1}$ è ottenuto con operazioni di prodotto e inverse di matrici, dunque è a maggior ragione una funzione analitica. \square

3 Topologia di $\text{Gr}(k, n)$

Il risultato che vogliamo mostrare è il seguente:

Teorema 3.1. *$\text{Gr}(k, n)$, con l'atlante definito nella precedente sezione, è una varietà analitica reale connessa e compatta.*

Per ottenerlo, dobbiamo analizzare una ad una le sue proprietà topologiche.

3.1 2-numerabilità

Il fatto che $\text{Gr}(k, n)$ sia a base numerabile segue immediatamente dall'osservazione che l'atlante dato su essa è finito.

3.2 Hausdorff

Un modo per dimostrare l'assioma di separazione di Hausdorff è utilizzare il seguente risultato generale, la cui dimostrazione è lasciata come esercizio:

Lemma 3.2. *Sia X uno spazio topologico, e sia \sim una relazione di equivalenza su X , tale che la mappa di proiezione sul quoziente*

$$X \rightarrow X/\sim$$

sia aperta. Allora, X/\sim è di Hausdorff se e solo se l'insieme

$$\{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$$

è chiuso in $X \times X$.

Nel nostro caso, X sarà $\mathcal{X}(k, n)$, e la relazione di equivalenza \sim sarà quella data dall'appartenenza ad una medesima orbita dell'azione. Supponiamo dunque che $A, B \in \mathcal{X}(k, n)$ siano tali che $A \not\sim B$. Posto

$$\begin{aligned} A &= (w_1 | \cdots | w_k), \\ B &= (z_1 | \cdots | z_k), \end{aligned}$$

ciò significa esattamente che esiste un indice $j \in \{1, \dots, k\}$ tale che z_j non è generato da $\{w_1, \dots, w_k\}$. In particolare, la matrice $(A|z_j)$ ha rango massimo, ossia è un elemento di $\mathcal{X}(k+1, n)$. Ora, siccome gli spazi $\mathcal{X}(\cdot, \cdot)$ sono aperti nei corrispondenti spazi di matrici, possiamo trovare un intorno U di A in $\mathcal{X}(k, n)$, un intorno V_j di z_j in \mathbb{R}^n e un intorno V' della matrice $(z_1 | \cdots | z_{j-1} | z_{j+1} | \cdots | z_n)$ in $\mathcal{X}(k-1, n)$, tali che $U \times V_j \subseteq \mathcal{X}(k+1, n)$ e $V \times V_j \subseteq \mathcal{X}(k, n)$ (notazionalmente, qui i prodotti cartesiani sono da interpretare come l'aggiunta delle opportune componenti di matrici, dovrebbe essere chiaro di volta in volta quali componenti). A questo punto, è abbastanza chiaro che U e $V \times V_j$ sono rispettivamente intorni aperti di A e B in $\mathcal{X}(k, n)$, tali che per ogni $A' \in U$ e per ogni $B' \in V \times V_j$, $A' \not\sim B'$. Questo, grazie al Lemma 3.2, dimostra la proprietà di separazione di Hausdorff per $\text{Gr}(k, n)$.

3.3 Connessione

Giusto come promemoria, citiamo il seguente, ben noto, risultato:

Proposizione 3.3. *Lo spazio delle matrici invertibili $\text{GL}(n)$ ha due componenti connesse per archi:*

$$\begin{aligned} \text{GL}^+(n) &= \{A \in \text{GL}(n) : \det A > 0\}, \\ \text{GL}^-(n) &= \{A \in \text{GL}(n) : \det A < 0\}. \end{aligned}$$

Utilizzeremo tale proposizione per dimostrare la seguente:

Proposizione 3.4. *Per $n \geq 2$ e $k = 1, \dots, n-1$, lo spazio $\mathcal{X}(k, n)$ è connesso per archi.*

Dimostrazione. Siano $A = (w_1 | \cdots | w_k)$ e $B = (z_1 | \cdots | z_k)$ elementi di $\mathcal{X}(k, n)$. Possiamo sicuramente completare (w_1, \dots, w_k) e (z_1, \dots, z_k) a basi di \mathbb{R}^n , rispettivamente $(w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n)$ e $(z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$, facendo anche in modo che le matrici quadrate $(w_1 | \cdots | w_n)$ e $(z_1 | \cdots | z_n)$ abbiano entrambe determinante positivo: se necessario, cambiamo il segno ad uno dei vettori che aggiungiamo. A questo punto, sfruttiamo il fatto che $\text{GL}^+(n)$ è connesso per archi. Troviamo un'applicazione continua

$$M(\cdot) = (v_1(\cdot) | \cdots | v_n(\cdot)) : [0, 1] \rightarrow \text{GL}^+(n),$$

tale che $M(0) = (w_1 | \cdots | w_n)$ e $M(1) = (z_1 | \cdots | z_n)$. Allora, è chiaro che

$$(v_1(\cdot) | \cdots | v_k(\cdot)) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}(k, n)$$

è un arco da A a B . □

Ora, la connessione per archi di $\text{Gr}(k, n)$ segue dal fatto che essa è l'immagine di $\mathcal{X}(k, n)$ attraverso la mappa di proiezione. En passant, ricordiamo che tutte le varietà topologiche sono localmente connesse per archi, dunque le componenti connesse di una varietà coincidono con le componenti connesse per archi; in particolare, una varietà topologica è connessa se e solo se è connessa per archi.

3.4 Compattezza

Ritorniamo un momento alla Definizione 1.1 e alla successiva discussione. Un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^n$ di dimensione k ha come base una k -upla di vettori indipendenti, ma notiamo che, grazie all'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, possiamo trovare sempre una sua base ortonormale. Sulla falsa riga del procedimento già visto all'inizio di queste dispense, possiamo allora considerare k -uple (w_1, \dots, w_k) di vettori ortonormali, ossia a due a due ortogonali e di norma 1:

$$\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (3.1)$$

Quando avviene che due siffatte k -uple identificano lo stesso sottospazio W ? Sempre ricordando quanto già fatto, identifichiamo una k -upla (w_1, \dots, w_k) alla matrice $(w_1 | \dots | w_k)$. Noi già sappiamo che due k -uple (w_1, \dots, w_k) e (w'_1, \dots, w'_k) generano lo stesso sottospazio se e solo se esiste una matrice $M \in \text{GL}(k)$ tale che

$$(w'_1 | \dots | w'_k) = (w_1 | \dots | w_k)M$$

Se però consideriamo k -uple ortonormali, la matrice M è necessariamente ortogonale (esercizio!). Siamo allora naturalmente portati a considerare l'insieme

$$\mathcal{X}_0(k, n) = \{A = (w_1 | \dots | w_k) \in \mathcal{M}(k, n) : \langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k\}, \quad (3.2)$$

che vediamo come sottospazio topologico di $\mathcal{M}(k, n)$ munito della topologia indotta. Chiaramente $\mathcal{X}_0(k, n) \subseteq \mathcal{X}(k, n)$; analogamente a come $\text{GL}(k)$ agisce su $\mathcal{X}(k, n)$, possiamo far agire il gruppo delle matrici ortogonali $\text{O}(k)$ su $\mathcal{X}_0(k, n)$, tramite $(A, M) \mapsto AM$, per ogni $A \in \mathcal{X}_0(k, n)$ e $M \in \text{O}(k)$.

Ora, il discorso fatto dovrebbe portarci a sospettare che lo spazio delle orbite

$$\mathcal{X}_0(k, n) / \text{O}(k)$$

non sia altro che una definizione equivalente della grassmanniana $\text{Gr}(k, n)$. In effetti, possiamo subito dimostrare il seguente:

Lemma 3.5. *L'inclusione $\mathcal{X}_0(k, n) \hookrightarrow \mathcal{X}(k, n)$ induce un'applicazione continua e biunivoca*

$$F : \mathcal{X}_0(k, n) / \text{O}(k) \rightarrow \text{Gr}(k, n). \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Data $A \in \mathcal{X}_0(k, n)$, denotiamo con $[A]_{\text{O}(k)}$ la sua orbita rispetto all'azione di $\text{O}(k)$, e con $[A]_{\text{GL}(k)}$ quella rispetto all'azione di $\text{GL}(k)$. Poiché $\text{O}(k) \subseteq \text{GL}(k)$,

l'applicazione F è ben definita, ed è senz'altro continua, poiché indotta sui quozienti dall'inclusione $\mathcal{X}_0(k, n) \hookrightarrow \mathcal{X}(k, n)$, che è continua. Osserviamo che, data $A \in \mathcal{X}_0(k, n)$, per definizione $F([A]_{\mathcal{O}(k)}) = [A]_{\text{GL}(k)}$

Per l'iniettività, supponiamo che $A, B \in \mathcal{X}_0(k, n)$ siano tali che $[A]_{\text{GL}(k)} = [B]_{\text{GL}(k)}$, cioè esiste $M \in \text{GL}(k)$ tale che

$$B = AM.$$

Però, siccome A e B hanno come colonne vettori ortonormali, M è necessariamente una matrice ortogonale, come peraltro era già stato osservato. Questo significa esattamente che $[A]_{\mathcal{O}(k)} = [B]_{\mathcal{O}(k)}$, come volevamo.

Vediamo infine la suriettività. Sia $[A]_{\text{GL}(k)} \in \text{Gr}(k, n)$, ove $A = (w_1 | \cdots | w_k)$. Grazie all'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, possiamo trovare una k -upla di vettori ortonormali (z_1, \dots, z_k) tale che

$$\text{span}\{w_1, \dots, w_k\} = \text{span}\{z_1, \dots, z_k\}.$$

Dunque, posto $B = (z_1 | \cdots | z_k)$, abbiamo che $B \in \mathcal{X}_0(k, n)$, e $[B]_{\text{GL}(k)} = [A]_{\text{GL}(k)}$, cioè $F([B]_{\mathcal{O}(k)}) = [A]_{\text{GL}(k)}$. \square

L'interesse di tale realizzazione alternativa della grassmanniana è dato dal seguente risultato:

Lemma 3.6. $\mathcal{X}_0(k, n)$ è compatto.

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{X}_0(k, n)$ è visto come sottospazio di $\mathcal{M}(k, n)$ munito della topologia euclidea (indotta da una qualsiasi norma vogliamo considerare), ci basta verificare che è chiuso e limitato in $\mathcal{M}(k, n)$.

La chiusura segue direttamente dal fatto che $(w_1 | \cdots | w_k) \in \mathcal{X}_0(k, n)$ se e solo se valgono le condizioni (3.1), che esplicitate nelle componenti dei w_i sono un sistema finito di equazioni polinomiali.

Per quanto riguarda la limitatezza, possiamo controllarla usando una qualsiasi norma su $\mathcal{M}(k, n)$ (in dimensione finita, tutte le norme sono equivalenti). Data $A = (v_1 | \cdots | v_k) \in \mathcal{M}(k, n)$, poniamo

$$\|A\| = |v_1| + \cdots + |v_k|.$$

Allora, se $A \in \mathcal{X}_0(k, n)$, abbiamo semplicemente

$$\|A\| = k,$$

poiché le colonne di A sono vettori di norma 1. Ciò assicura la limitatezza cercata. \square

Finalmente, otteniamo il risultato di compattezza di $\text{Gr}(k, n)$:

Corollario 3.7. Lo spazio di orbite $\mathcal{X}_0(k, n)/\mathcal{O}(k)$ è compatto. Inoltre, l'applicazione (3.3) è un omeomorfismo. In particolare, $\text{Gr}(k, n)$ è compatta.

Dimostrazione. La compattezza di $\mathcal{X}_0(k, n)/\mathcal{O}(k)$ segue direttamente dal Lemma 3.6. Dunque, poiché $\text{Gr}(k, n)$ è di Hausdorff, segue che l'applicazione (3.3) è chiusa. In particolare, essendo continua, chiusa e biunivoca, è un omeomorfismo. \square

4 Lo spazio tangente

In questa sezione, vediamo un'interessante caratterizzazione intrinseca dello spazio tangente di $\text{Gr}(k, n)$ in uno qualunque dei suoi punti. Nel discorso che segue, spesso confonderemo un elemento di $\text{Gr}(k, n)$ con un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n .

Sia $W_0 \in \text{Gr}(k, n)$, e sia $v \in T_{W_0}(\text{Gr}(k, n))$. Possiamo scrivere

$$v = \dot{W}(0),$$

ove $W(\cdot)$ è una curva di classe C^∞ su $\text{Gr}(k, n)$, definita in un intorno di $t = 0$, con $W(0) = W_0$. L'idea è che, in un certo senso, v sia determinato dalle derivate in 0 delle curve $w(\cdot)$ a valori in \mathbb{R}^n tali che $w(t) \in W(t)$ per ogni t . Supponendo che $W(\cdot)$ sia tutta contenuta nel dominio di una carta locale (ciò è sempre vero a meno di restringere l'intorno in cui è definita), identifichiamola alla matrice delle sue coordinate locali:

$$W(t) = (w_1(t) | \cdots | w_k(t)),$$

ove i $w_i(t)$ sono per ogni t una base di $W(t)$, e dipendono in modo C^∞ da t . Dunque, data una curva $w(\cdot) \in W(\cdot)$ di classe C^∞ , possiamo scrivere

$$w(t) = \alpha^i(t)w_i(t), \tag{4.1}$$

per opportuni scalari $\alpha^i(t)$, per $i = 1, \dots, k$.

Lemma 4.1. *Le funzioni $t \mapsto \alpha^i(t)$ sono C^∞ in un intorno di 0.*

Dimostrazione. Completiamo $(w_1(0), \dots, w_k(0))$ ad una base

$$(w_1(0), \dots, w_k(0), w_{k+1}(0), \dots, w_n(0))$$

di \mathbb{R}^n . Allora, per t in un opportuno intorno di 0, $(w_1(t), \dots, w_n(t))$ è sempre una base di \mathbb{R}^n , ove i $w_j(t) = w_j(0)$ sono costanti, per $j = k+1, \dots, n$ (qui, si sta sostanzialmente usando la continuità dell'applicazione determinante). Scriviamo sempre $w(t) = \alpha^i(t)w_i(t)$, per $i = 1, \dots, n$, con $\alpha^j(t) = 0$ per ogni $j = k+1, \dots, n$. Sia $M(t)$ la matrice tale che

$$M(t)e_i = w_i(t).$$

Essa è invertibile e dipende in modo C^∞ da t , poiché i $w_i(\cdot)$ sono C^∞ . Se

$$w(t) = w^i(t)e_i,$$

allora

$$\begin{aligned} M(t) \begin{pmatrix} \alpha^1(t) \\ \vdots \\ \alpha^n(t) \end{pmatrix} &= \alpha^i(t)M(t)e_i = \alpha^i(t)w_i(t) = w(t) \\ &= w^i(t)e_i = \begin{pmatrix} w^1(t) \\ \vdots \\ w^n(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Allora, sfruttando che $t \mapsto M(t)^{-1}$ è C^∞ e che i $w^i(\cdot)$ sono C^∞ (si tratta delle componenti di $w(\cdot)$), possiamo concludere. \square

Deriviamo la (4.1) in $t = 0$. Otteniamo l'identità

$$\dot{w}(0) = \dot{\alpha}^i(0)w_i(0) + \alpha^i(0)\dot{w}_i(0). \quad (4.2)$$

Adesso, osserviamo che, presa un'altra curva $z(\cdot)$ definita e di classe C^∞ in un intorno di 0, tale che $z(t) = \beta^i(t)w_i \in W(t)$ per ogni t , e tale che $z(0) = w(0)$, si ha che

$$\dot{w}(0) - \dot{z}(0) = (\dot{\alpha}^i(0) - \dot{\beta}^i(0))w_i(0) \in W_0,$$

poiché $\alpha^i(0) = \beta^i(0)$. Questo significa che è ben definita la funzione

$$\begin{aligned} f_{W(\cdot)} : W_0 &\rightarrow \mathbb{R}^n / W_0, \\ f_{W(\cdot)}(w_0) &= [\dot{w}(0)], \end{aligned} \quad (4.3)$$

ove $w(\cdot)$ è una qualsiasi curva C^∞ in un intorno di 0 tale che $w(0) = w_0$ e tale che $w(t) \in W(t)$ per ogni t .

Lemma 4.2. *$f_{W(\cdot)}$ è lineare. Inoltre, se $Z(\cdot)$ è un'altra curva C^∞ su $\text{Gr}(k, n)$ definita in un intorno di 0, tale che $Z(0) = W(0) = W_0$ e $\dot{Z}(0) = \dot{W}(0) = v \in T_{W_0}(\text{Gr}(k, n))$, allora $f_{W(\cdot)} = f_{Z(\cdot)}$.*

Dimostrazione. sia $w_0 \in W_0$, siano poi $w(\cdot)$ e $z(\cdot)$ curve C^∞ definite in un intorno di 0, tali che $w(t) \in W(t)$ e $z(t) \in Z(t)$ per ogni t , con $w(0) = z(0) = w_0$. In una carta locale in W_0 , abbiamo

$$\begin{aligned} W(t) &= (w_1(t) | \cdots | w_k(t)), \\ Z(t) &= (z_1(t) | \cdots | z_k(t)), \end{aligned}$$

con $w_i(0) = z_i(0)$ e $\dot{w}_i(0) = \dot{z}_i(0)$, per ogni $i = 1, \dots, k$. Scriviamo:

$$\begin{aligned} w(t) &= \alpha^i(t)w_i(t), \\ z(t) &= \beta^i(t)z_i(t), \end{aligned}$$

osservando che $\alpha^i(0) = \beta^i(0)$ per ogni i . Deriviamo in $t = 0$, e troviamo che

$$\begin{aligned} f_{W(\cdot)}(w_0) - f_{Z(\cdot)}(w_0) &= [\dot{w}(0) - \dot{z}(0)] \\ &= [\dot{\alpha}^i(0)w_i(0) + \alpha^i(0)\dot{w}_i(0) - \dot{\beta}^i(0)z_i(0) - \beta^i(0)\dot{z}_i(0)] \\ &= [(\dot{\alpha}^i(0) - \dot{\beta}^i(0))w_i(0)] \\ &= [0]. \end{aligned} \quad \square$$

Riassumendo, è ben definita un'applicazione

$$\begin{aligned} T_{W_0}(\text{Gr}(k, n)) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W_0, \mathbb{R}^n/W_0), \\ v &\mapsto f_v = f_{W(\cdot)}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

ove $W(\cdot)$ è una qualunque curva C^∞ su $\text{Gr}(k, n)$ definita in un intorno di 0, tale che $W(0) = W_0$ e $\dot{W}(0) = v$. Tale applicazione ci fornisce la caratterizzazione di $T_{W_0}(\text{Gr}(k, n))$ che stiamo cercando:

Proposizione 4.3. *La (4.4) è un isomorfismo lineare.*

Dimostrazione. La linearità della (4.4) è quasi immediata (esercizio!). Gli spazi di partenza e arrivo hanno la stessa dimensione, dunque per concludere ci basta mostrare che la nostra applicazione è iniettiva.

Sia $v \in T_{W_0}(\text{Gr}(k, n))$ tale che $f_v = 0$. Supponiamo che $v = \dot{W}(0)$, per una qualche curva $W(\cdot)$ su $\text{Gr}(k, n)$ con $W(0) = W_0$. Supponiamo inoltre che $W(\cdot)$ sia tutta contenuta nel dominio della carta locale $\pi(U_I)$, per un opportuno multi-indice $I = (i_1, \dots, i_k)$. In carte locali scriviamo, al solito:

$$W(t) = (w_1(t) | \dots | w_k(t)).$$

Siccome $f_v = f_{W(\cdot)} = 0$, in particolare deduciamo che $\dot{w}_r(0) \in W_0$ per ogni $r = 1, \dots, k$. Possiamo dunque scrivere:

$$\dot{w}_r(0) = \alpha_r^s w_s(0), \tag{4.5}$$

per opportuni α_r^s . Ora, dette $w_r^j(t)$ le componenti del vettore $w_r(t)$ ($j = 1, \dots, n, r = 1, \dots, k$), poiché siamo nella carta $\pi(U_I)$, abbiamo

$$w_r^{i_s}(t) = \delta_r^s,$$

per ogni $s, r = 1, \dots, k$, per ogni t . Allora, prendendo le componenti i_s in (4.5), otteniamo per ogni $r = 1, \dots, k$ l'equazione

$$\alpha_r^s = \alpha_r^h \delta_h^s = \alpha_r^h w_h^{i_s}(0) = \dot{w}_r^{i_s}(0) = 0,$$

per ogni $s = 1, \dots, k$. Da qui, deduciamo che $\dot{w}_r(0) = 0$ per ogni $r = 1, \dots, k$, cioè $v = \dot{W}(0) = 0$. \square