Corso di Geometria 2 - a.a. 2013-2014

Prova scritta del 15 luglio 2014

Esercizio 1 Sia $\underline{\alpha}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile regolare tale che $||\underline{\alpha}'(t)|| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, e con curvatura $k(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si consideri la curva $\underline{\beta}(t) = \underline{\alpha}'(t)$.

1. Verificare che $\underline{\beta}$ é una curva differenziabile regolare.

2. Indicato con s un parametro naturale per $\underline{\beta}$, verificare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta:
$$\frac{ds}{dt} = k(t), \quad \vec{t}_{\underline{\beta}}(t) = \vec{n}_{\underline{\alpha}}(t),$$
dove $\vec{t}_{\underline{\beta}}(t)$ é il versore tangenta a $\underline{\beta}$ in t e $\vec{n}_{\underline{\alpha}}(t)$ é il versore normale principale di $\underline{\alpha}$ in t.

3. Indicata con $\tau = \tau(t)$ la torsione di $\underline{\alpha}$, verificare che la curvatura di $\underline{\beta}$ é la seguente: $k_{\underline{\beta}}(t) = \sqrt{1 + \frac{\tau(t)^2}{k(t)^2}}$.

Esercizio 2 Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x, z > 0 \mid x^3 + xyz + z^3 + x^2z^2 = 0\ \}.$$

1. Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.

2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (z, y, x)$. Mostrare che $F_{|S}$ è un'isometria di S.

3. Sia $\gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, -2t - t^2, t)$. Dimostrare che la parametrizzazione per lunghezza d'arco di γ è una geodetica.

Esercizio 3 Sia
$$f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}},$$
$$f([x_0, x_1], [y_0, y_1]) = [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1].$$

1. Verificare che f è ben definita.

2. Mostrare che il differenziale di f,
$$Df_{([x_0,x_1],[y_0,y_1])} : T_{([x_0,x_1],[y_0,y_1])}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}) \to T_{f([x_0,x_1],[y_0,y_1])}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}),$$
è iniettivo per ogni $([x_0, x_1], [y_0, y_1]) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.

3. Mostrare che f è un embedding.

4. Determinare il gruppo fondamentale di $f(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})$.