Corso di Geometria 2 - a.a. 2013-2014
Prova scritta del 27 giugno 2014

Esercizio 1 Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \ \ 0 \leq z \leq 1 \ \},$$
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x^2 + y^2 = 1 \ \ z = 1 \ \}.$$

1. Verificare che X è semplicemente connesso.
2. Stabilire se A è un retratto di X.
3. Sia $O = (0, 0, 0)$, determinare il gruppo fondamentale di $X \setminus \{O\}$.

Esercizio 2 Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ y > 0 \ | \ x^2 - 2y^2 z = 0 \ \}.$$

1. Mostrare che S è una superficie regolare.
2. Siano $P = (1, 1, \frac{1}{2}) \in S$, $w = (1, 1, 0)$. Mostrare che $w \in T_P S$.
3. Determinare la curvatura della sezione normale C per P con con direzione tangente data da $\frac{w}{||w||}$.
4. Dire se C è una geodetica e se è una linea asintotica.

Esercizio 3 Siano $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ due vettori di norma 1 e tra loro ortogonali. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = w_1 \cos s + w_2 \sin s$. Sia $\epsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \epsilon < 1$ e si consideri

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$\phi(s, v) = \gamma(s) + \mathbf{n}(s)\epsilon \cos v + \mathbf{b}(s)\epsilon \sin v,$$

dove $\mathbf{n}, \mathbf{b}$ sono rispettivamente la normale e la binormale della curva γ.

1. Mostrare che $\forall (s, v) \in \mathbb{R}^2$ esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$ tale che $(s, v) \in U$ e tale che $\phi(U)$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2.
2. Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $\pi(s, v) = (e^{is}, e^{iv})$. Mostrare che esiste
$$\psi : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$$
tale che $\psi \circ \pi = \phi$.
3. Mostrare che ψ è un embedding.
4. Sia $S := \psi(S^1 \times S^1)$. Calcolare $\int_S K d\sigma$, dove K è la curvatura Gaussiana di S.