Corso di Geometria 2 - a.a. 2014-2015
Prova scritta del 21 gennaio 2015

Esercizio 1 Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(u,v) = (u^4 + v^4, u, v + u^2)$. Sia S l'immagine di ϕ

1. Mostrare che S è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ e ϕ è una sua parametrizzazione.
2. Determinare la prima e la seconda forma fondamentale di S nei punti $\phi(u,v)$.
3. Determinare la matrice che rappresenta il differenziale della mappa di Gauss rispetto alla base ϕ_u, ϕ_v del piano tangente a S in $\phi(u,v)$ nei punti in cui $u = 0$.
4. Dire se la curve coordinate nei punti in cui $u = 0$ sono linee di curvatura.

Esercizio 2 Siano $f, g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z,w) = 2x^2 + 3y^2$, $g(x,y,z,w) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - \frac{1}{4}$. Sia $X = g^{-1}(0)$.

1. Mostrare che X è una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3.
2. Determinare lo spazio tangente T_pX, $p = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}})$.
3. Sia $h = f_{|X} : X \to \mathbb{R}$. Per ogni $q \in X$, sia $M_q = \begin{pmatrix} (Jf)_q \\ (Jg)_q \end{pmatrix} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, dove $(Jf)_q$ e $(Jg)_q$ sono le matrici Jacobiane di f e g in q.
   Dato $v \in \mathbb{R}^4$, mostrare che $v \in Ker M_q$ se e solo se $v \in T_qX$ e $v \in Ker(Dh)_q$.
4. Determinare i punti critici di h.

   Esercizio 3 Si considerino in $\mathbb{R}^3$ la sfera unitaria S^2 con centro in $O = (0,0,0)$, la retta r di equazioni $x = y = 0$ ed i punti $N = (0,0,1)$ e $S = (0,0,-1)$. Sia
$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{r\}.$$

   (a) Verificare che $S^2 \setminus \{N, S\}$ è un retratto di deformazione di X;
   (b) determinare il gruppo fondamentale di X;
   (c) stabilire se X è semplicemente connesso.