Corso di Geometria 2 - a.a. 2014-2015
Prova scritta del 19 febbraio 2015

Esercizio 1 Si consideri la curva $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\alpha(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3).$$

1. Verificare che α è una curva biregolare sghemba.
2. Determinare il triedro di Frenet nel punto $P = \alpha(t)$.
3. Verificare che il rapporto $\frac{\tau}{K}$ è costante.
4. Determinare un versore $\mathbf{u}$ che forma un angolo costante con le rette tangenti alla curva.

Esercizio 2 Sia $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0, \mid \frac{x^3}{3} + 4y^2z = 0\}$.

1. Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.
2. Determinare il piano tangente ad S nel punto $p = (3, 3, -\frac{1}{4})$.
3. Verificare che il vettore $w = (0, 1, \frac{1}{6})$ appartiene a T_pS.
4. Determinare la curvatura normale lungo la direzione tangente $\frac{w}{||w||}$.
5. Determinare il gruppo fondamentale di $S \setminus \{p\}$.

Esercizio 3 Sia $F : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$,

$$F([x_0, x_1, x_2], [y_0, y_1]) = [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1, x_2y_0, x_2y_1].$$

1. Verificare che F è ben definita.
2. Siano $U_0 := \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid x_0 \neq 0\}$, $V_1 := \{[y_0, y_1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \mid y_1 \neq 0\}$, $W_1 := \{[z_0, ..., z_5] \in \mathbb{P}^5_{\mathbb{R}} \mid z_1 \neq 0\}$. Mostrare che $F(U_0 \times V_1) \subset W_1$.
3. Dimostrare che per ogni $p = ([x_0, x_1, x_2], [y_0, y_1]) \in U_0 \times V_1$, $DF_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ è iniettivo.