CORSO DI GEOMETRIA 2

Appello del 15 febbraio 2013

Esercizio 1
Siano
$$S := \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\},$$
$$X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ x^2 + y^2 - xz = 0\}$$
e sia $F : S \to X$,
$$F(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{(1-z)^2}, \frac{xy}{(1-z)^2}, \frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}\right).$$

(1) Dimostrare che X è una superficie regolare orientabile di classe C^∞.
(2) Dimostrare che $F : S \to X$ è un'applicazione C^∞.
(3) Dimostrare che $F : S \to X$ è un diffeomorfismo locale in un intorno del punto $p := (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
(4) Dire se F è un'isometria locale.

Esercizio 2
Siano
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y > 0,\ \frac{\sqrt{3}}{3} > z > 0, x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y > 0,\ \frac{\sqrt{3}}{3} > z > 0, x^2 + y^2 - z^2 = 1\},$$
e sia $C := S_1 \cap S_2$.

(1) Dimostrare che C è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1.
(2) Determinare la retta tangente a C nel punto $p := (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$.
(3) Mostrare che $\gamma : (0, \frac{\sqrt{3}}{3}) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (2t, \sqrt{1-3t^2}, t)$ è una parametrizzazione regolare di C.
(4) Calcolare la curvatura e la torsione di C in $\gamma(t)$, $\forall t \in (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Esercizio 3
Sia $n \geq 2$ un intero e $X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n(\sum_{i=i}^n x_i^2 - 1) = 0\}$.

(1) Posto $Y_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_n : x_n \geq 0\}$, dimostrare che Y_n è un retratto di X_n.
(2) Dimostrare che X_2 non è semplicemente connesso.
(3) X_n è semplicemente connesso per $n > 2$?