# CORSO DI GEOMETRIA 2

## Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

# CORSO DI GEOMETRIA 2

## Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b(t)}$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b(t)}$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

# CORSO DI GEOMETRIA 2

## Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b(t)}$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**
Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**
Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**
Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

# CORSO DI GEOMETRIA 2

## Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 16 luglio 2012

**Esercizio 1**

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con torsione $\tau$ mai nulla. Sia inoltre $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\beta(t) = \mathbf{b}(\mathbf{t})$ (dove $\mathbf{b}$ indica il versore binormale di $\alpha$).

(1) Dimostrare che $\beta$ è biregolare.
(2) Dimostrare che $\beta$ ha curvatura costante se e solo se $\kappa/\tau$ è costante (dove $\kappa$ indica la curvatura di $\alpha$).
(3) Dimostrare che, se $\kappa$ e $\tau$ sono costanti, allora il sostegno di $\beta$ è contenuto in una circonferenza.

**Esercizio 2**

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z^3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che $S$ è una superficie regolare orientabile di classe $C^\infty$.
(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Mostrare che la restrizione di $F$ ad $S$ è un'isometria di $S$.
(3) Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t^{-\frac{4}{3}})$. Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare contenuta in $S$.
(4) Dire se una sua parametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica.
(5) Dire se $\gamma$ è una linea asintotica.

**Esercizio 3**

Sia $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_t(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + tx_n^2$.

(1) Determinare i punti critici e i valori critici di $f_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ .
(2) Se $n = 2$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è connessa.
(3) Se $n = 3$, dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la fibra $f_t^{-1}(1)$ è semplicemente connessa.