CORSO DI GEOMETRIA 2

Appello del 26 giugno 2012

Esercizio 1

Sia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco, con $0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Sia $\phi : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\phi(s, v) = \gamma(s) + v\mathbf{n}(s),$$

dove $\mathbf{n}(s)$ è il versore normale alla curva γ al tempo s.

(1) Mostrare che per ogni $v < 0$ e per ogni $s \in (a, b)$, il differenziale di ϕ nel punto (s, v) è iniettivo.

(2) Mostrare che esiste un $0 < \epsilon < 1$ tale che l'immagine della restrizione di ϕ a $(-\epsilon, \epsilon) \times (-1 - \epsilon, -1 + \epsilon)$ sia una superficie regolare $S = \phi((-\epsilon, \epsilon) \times (-1 - \epsilon, -1 + \epsilon)) \subset \mathbb{R}^3$.

(3) Mostrare che per ogni $p \in S$, esiste un segmento di retta che passa per p ed è contenuto in S.

(4) Determinare il segno della curvatura Gaussiana in ogni punto di S.

(5) Scelto ϵ come nel punto (2) e fissato $v_0 \in (-1 - \epsilon, -1 + \epsilon)$, sia $\sigma(s) := \gamma(s) + v_0\mathbf{n}(s)$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dimostrare che $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ è una curva biregolare contenuta in S.

Esercizio 2

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Dimostrare che S è una superficie regolare orientabile di classe C^∞.

(2) Sia $C := S \cap \{z = 0\}$. Determinare una parametrizzazione per lunghezza d'arco per C.

(3) Fissata un'orientazione di S determinare la curvatura normale di C in ogni suo punto.

(4) Dire se C è una geodetica.

(5) Dire se C è una linea asintotica.

Esercizio 3

Siano

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$Y_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y - \lambda = 0\}.$$

(1) Dimostrare che X è omotopicamente equivalente a S^1.

(2) Dimostrare che, per $0 < |\lambda| \leq 1$, X è omotopicamente equivalente ma non omeomorfo a $X \cup Y_\lambda$.

(3) $X \cup Y_0$ è semplicemente connesso?