CORSO DI GEOMETRIA 2

Appello del 18 febbraio 2020

Esercizio 1
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie S parametrizzata da

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \to S,$$
$$\sigma(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u).$$

(1) Verificare che S è una superficie regolare orientabile di classe C^∞.
(2) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S nel punto $\sigma(u, v)$.
(3) Determinare la natura dei punti di S al variare di (u, v).
(4) Sia $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$: $\alpha(t) = (t, 0, t^3)$. Mostrare che α è una curva regolare contenuta in S.
(5) Calcolare il triedro di Frenet di α in ogni punto.
(6) Calcolare la curvatura e la torsione di α in ogni punto.
(7) Determinare le direzioni principali di curvatura nei punti $\alpha(t)$.
(8) Calcolare la curvatura normale di α.
(9) Dire se α è una geodetica.

Esercizio 2 Siano

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+1)^2+y^2+z^2 = 1\},\ T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2+z^2 = 1\},$$
$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y^2 + z^2 < 1\},\ X := S \cup D,\ Y := S \cup T.$$

(1) Mostrare che X è semplicemente connesso.
(2) Mostrare che Y è connesso per archi.
(3) Determinare il gruppo fondamentale di Y.