Appunti del corso di Geometria Differenziale

Gian Pietro Pirola

Indice

Capitolo 1

Varietà differenziabili

1.1 Varietà ed applicazioni lisce

1.1.1 Varietà topologiche

In questa prima lezione introdurremo il concetto di varietà. Queste strutture, la cui formalizzazione è peraltro piuttosto recente, permetteranno di estendere in maniera naturale le nozioni del calcolo differenziale. Intuitivamente una varietà è un oggetto che localmente appare come uno spazio euclideo. Per dare un senso preciso alla definizione cominceremo col ricordare la definizione di spazio topologico.

Uno spazio topologico è il dato di insieme non vuoto X e di una famiglia $\mathcal{V}$ di sottoinsiemi di X detti aperti. Per la famiglia di aperti $\mathcal{V}$ devono valere le proprietà seguenti:

1. X e $\emptyset$ sono in $\mathcal{V}$;
2. l'unione di ogni famiglia di elementi di $\mathcal{V}$ è in $\mathcal{V}$;
3. l'intersezione di una famiglia finita di elementi di $\mathcal{V}$ è in $\mathcal{V}$.

Ricordiamo che i chiusi sono i complementari degli aperti e che un intorno di un punto $p \in X$ è un sottoinsieme U che contiene un aperto A tale che $p \in A$. Una funzione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici X ed Y si dice continua se per ogni aperto $A \subset Y$ $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto. Uno spazio topologico X si dice separato (o di Hausdorff o anche T2) se per ogni coppia di punti distinti $p \in X$, $q \in X$ $p \neq q$, esistono intorni U_p di p e U_q di q tali che
$$U_p \cap U_q = \emptyset.$$
In questo corso tutti gli spazi saranno, di norma, separati.
Ricordiamo inoltre che un ricoprimento di X è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti
$$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$$
di X tali che
$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$
Un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ si dice aperto se tutti gli U_i sono aperti.

Definizione 1.1.1.1. *Una spazio topologico separato X è una varietà topologica di dimensione n se ammette un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ tale che ognuno degli U_i sia omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.*

In parole povere ogni punto di una varietà ha un intorno omeomorfo ad un aperto dello spazio euclideo. Esaminiamo la definizione nel dettaglio. Data una varietà $X = \{X,\mathcal{U}\}$, per ogni $U_i \in \mathcal{U}$ può essere definita una applicazione continua detta **applicazione coordinata**

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n.$$

L'immagine $B_i = \varphi_i(U_i)$ è un aperto di R^n e l'applicazione $\varphi_i : U_i \to B_i$ è un omeomorfismo. Per $q \in U_i$ possiamo scrivere,

$$\varphi_i(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q)).$$

$x_k(q)$ è la k-esima coordinata del punto q rispetto alla carta (U_i, φ_i). Gli aperti U_i si dicono aperti **coordinati**. La funzione φ_i coordina U_i, cioè assegna univocamente ad ogni punto dell'aperto una n-upla di scalari che determina il punto. La mappa $\varphi_i : U_i \to B_i$ si chiama **carta coordinata** e la famiglia delle carte $\{U_i, \varphi_i\}$ si chiama **atlante**.

Esempio 1.1.1.2.

1. *Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è tautologicamente una varietà.*

2. *Sia V un spazio vettoriale di dimensione finita sui reali, una base di V definisce l' applicazione coordinata $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ con $n = \dim V$. La topologia di V è indotta da φ.*

3. *Un aperto di $\mathbb{R}^n$, e più in generale un aperto di una varietà, è in modo naturale una varietà.*

4. *Veniamo ad un esempio non banale: le sfere. Il sottoinsieme $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$*

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

Ora fissiamo i e sia

$$U_i^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \ : x_i > 0\}$$
$$U_i^- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \ : x_i < 0\}.$$

Definiamo $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$

$$\varphi_i^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$$

Le immagini di $\varphi_i^\pm$ sono i dischi unitari aperti. Il ricoprimento dato dagli $U_i^\pm$ definisce un atlante di S^n. Per $n = 2$ e $i = 3$, nell'usuale visione della sfera come mappamondo, abbiano le calotte equatoriali : U_3^- contiene il tropico del Capricorno e il polo sud.

5. *Il prodotto cartesiano di due varietà X e Y di dimensioni n e m è una varietà di dimensione $n + m$. Si prendono infatti come aperti coordinati i prodotti delle carte coordinate di X e di Y.*

Esercizi 1.1.1.3. *a) Data una varietà topologica X di dimensione n e $p \in X$; dimostrare che esiste un intorno coordinato U di p omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Trovare inoltre una carta coordinata φ tale che $\varphi(p) = 0$.*

b) Trovare un atlante delle sfere avente solo due carte, dire se una sola carta sia possibile.

c) Dare un esempio di uno spazio topologico separato che non sia una varietà topologica.

1.1.2 Cambiamento di carte e varietà differenziabili

Discuteremo ora i cambiamenti di coordinate. Nella pratica automobilistica spesso dobbiamo passare da una cartina ad un'altra, tale semplice operazione è fonte di irritazione tra il conducente e il navigatore e spessissimo causa di un odio eterno verso l'editore dell'atlante. Oltre all'importanza pratica, i cambiamenti di carta possono essere utilizzati come concetto di fondazione per la definizione delle varietà differenziabili.

Date una varietà topologica di dimensione n e due carte U_i e U_j sia

$$U_{ij} = U_i \cap U_j = U_{ji}.$$

Naturalmente U_{ij} è un aperto, ignoreremo il caso di intersezione vuota. Utilizzando le funzioni φ_i e φ_j abbiamo due modi di mappare, cioè dare coordinate ad U_{ij}.

Poniamo

$$B_{ij} = \varphi_i(U_{ij}) \subset \mathbb{R}^n, \quad B_{ji} = \varphi_j(U_{ji}) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{e}$$

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1} : B_{ji} \to \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Si ha che φ_{ij} è un omeomorfismo sull'immagine che è l'aperto B_{ij} di $\mathbb{R}^n$. Si noti che $\varphi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$ è una funzione definita su un aperto di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^n$. Ha quindi senso richiedere che essa sia differenziabile. Due atlanti su X possono non essere compatibili dal punto di vista differenziale, è necessario allora specificare, oltre allo spazio X, il suo atlante.

Definizione 1.1.2.1. *Una varietà differenziale di classe k, $\mathscr{C}^k$ ($\mathscr{C}^\infty$), è il dato di una varietà topologica e un atlante $\{X, \mathcal{V}\} = \{X, U_i, \varphi_i\}$, tale che i cambiamenti di carta φ_{ij} (definiti in 1.1) sono funzioni differenziabili di classe $\mathscr{C}^k$ ($\mathscr{C}^\infty$). Le varietà topologiche si diranno anche varietà $\mathscr{C}^0$.*

Può essere utile poter aggiungere ad un atlante delle carte, bisogna allora verificare che la struttura differenziale sia mantenuta. Sia $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta , cioè V è aperto di X, $\varphi(V)$ è aperto di $\mathbb{R}^n$ e φ è un omeomorfismo sull'immagine. Diremo che $\{V, \varphi\}$ è **compatibile** con l'atlante $\mathcal{V}$ se per ogni $U_i \in \mathcal{V}$ tale che $U_i \cap V$ non sia vuoto, le applicazioni

$$\varphi_i \varphi^{-1} : \varphi(U_i \cap V) \to \mathbb{R}^n \;\; e \;\; \varphi \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap V) \to \mathbb{R}^n$$

sono di classe $\mathscr{C}^k$ ($\mathscr{C}^\infty$). Fissato allora un atlante $\mathcal{V}$ possiamo considerare l'atlante $\mathcal{V} \cup \{V, \varphi\}$; più in generale possiamo aggiungere a $\mathcal{V}$ tutte le carte compatibili. In questo modo otteniamo un **Atlante massimale** .

Definizione 1.1.2.2. *Una struttura differenziale $\mathscr{C}^k$ ($\mathscr{C}^\infty$) è il dato una varietà differenziale e di un atlante massimale $\{X, \mathcal{U}\} = \{X, U_i, \varphi_i\}$, tale che i cambiamenti di carta siano di classe $\mathscr{C}^k$ ($\mathscr{C}^\infty$).*

Nella pratica non si usa mai direttamente l'atlante massimale, ma esso ci permette di aggiungere carte opportune in modo da semplificare osservazioni, operazioni e calcoli.

Esempio 1.1.2.3. *L'atlante dello spazio proiettivo reale e complesso. Le grassmanniane.*

Esercizi 1.1.2.4.

a) Si verifichi che le varietà topologiche definite in 1.1.1.2 sono varietà differenziali.

b) Si considerino sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ due carte definite su tutto l'insieme, la prima è l'identità $\varphi(x) = x$ la seconda $\psi(x) = x^3$. Dire se ψ e φ sono compatibili di classe $\mathscr{C}^k$ con $k > 0$.

1.1.3 Funzioni differenziabili

Uno dei vantaggi dell'introduzione di carte coordinate è quello di poter studiare gli aspetti locali in spazi che si considerano, qualche volta a sproposito, essenzialmente noti. Vedremo ora come sia possibile estendere il concetto di funzione differenziabile alle varietà.

Nel seguito useremo la seguente convenzione se K, H, L, A e B sono insiemi con $A \subset K$ e $B \subset H$. Supponiamo siano date due funzioni $f : A \to H$ e $g : B \to L$. Con $gf = g \cdot f$ indicheremo la composizione:

$$gf : A \cap f^{-1}(B) \to L.$$

(Il caso degenere $A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ può essere sistematicamente ignorato).

Date $\{M,\mathcal{U}\}$ e$\{N, \mathcal{V}\}$ due varietà di dimensione rispettivamente m e n di classe k ($k \leq \infty$). Abbiamo la seguente:

Definizione 1.1.3.1. *Un' applicazione $F : M \to N$ si dice differenziabile di ordine k (∞), $F \in \mathscr{C}^k(M, N)$ ($\mathscr{C}^\infty(M, N)$) se è continua e per ogni carta $\{U, \varphi\}$ di M e $\{V, \psi\}$, $\psi F \varphi^{-1}$ è differenziabile di ordine k (∞). Diremo anche che F è regolare di ordine k, e nel caso $F \in \mathscr{C}^\infty(M, N)$ diremo che F è liscia.*

Abbiamo utilizzato la nostra convenzione: La continuità di F assicura che $F^{-1}(V)$ è aperto in N, quindi $B = \varphi(U \cap F^{-1}(V))$ è un aperto di $\mathbb{R}^m$,

Allora ha senso discutere la differenziabilità di:

$$\psi F \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) = B \ \to \mathbb{R}^n,$$

quando B è non vuoto.

Si noti che aggiungendo carte compatibili agli atlanti $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ di M e N, la differenziabilità non cambia. Infatti se abbiamo una coppia di carte compatibili $\{W, \alpha\}$ di M e $\{Z, \beta\}$ di N allora:

$$\beta F \alpha^{-1} = (\beta\psi^{-1})(\psi F \varphi^{-1})(\varphi\alpha^{-1}),$$

il risultato segue allora dal teorema di composizione di funzioni differenziabili. Applicando lo stesso principio abbiamo la seguente:

Proposizione 1.1.3.2. *Siano X, M e N varietà $\mathscr{C}^k$, siano $G : X \to M$ e $F : M \to N$ regolari di ordine k allora la composizione $F \circ G$ è regolare di ordine k :*

$$F \circ G \in \mathscr{C}^k(X, N).$$

Naturalmente l'identità è regolare. Si ha allora la categoria delle varietà differenziabili, gli oggetti sono le varietà differenziali, i morfismi sono le applicazioni differenziabili.

Definizione 1.1.3.3. *Due varietà N M di classe si dicono diffeomorfe se esistono $F \in \mathscr{C}^k(N, M)$ e $G \in \mathscr{C}^k(M, N)$ tali che $F \circ G = id_M$ $G \circ F = id_N$.*

La topologia differenziale studia le varietà a meno di diffeomorfismi.

Esercizi 1.1.3.4.

a) Dimostrare che due varietà diffeomorfe hanno la stessa dimensione.

b) Dimostrare che l'inclusione della sfera S^n in $\mathbb{R}^{n+1}$ è liscia.

c) Dimostrare che le funzioni costanti e l'identità sono differenziabili.

Nota 1.1.3.5. *Si potrebbero introdurre altri tipi di varietà per esempio le varietà analitiche, dette qualche volta di classe $\mathscr{C}^\omega$, i cui cambiamenti di coordinate siano localmente serie di potenze. Nella direzione di poca regolarità sono di una certa importanza le varietà Lipschitz aventi cambiamenti di carta Lipschitziane. In generale serve una classe di omeomorfismi chiusi per composizioni . Per evitare complicazioni preferiamo limitarci a varietà $\mathscr{C}^k$, privilegiando il caso $k = \infty$.*

1.1.4 Funzioni regolari a valori reali e partizione dell'unità

Le funzioni a valori reali $\mathscr{C}^k(M) = \mathscr{C}^k(M, \mathbb{R})$ sono particolarmente importanti. In questa lezione costruiremo delle applicazioni regolari non costanti. Cominciamo con la seguente:

Definizione 1.1.4.1. *Data una funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{R}$ il supporto di f, che denoteremo con $suppf$ è la chiusura di $U = \{x \in M : f(x) \neq 0)\}$,il supporto è quindi il più piccolo chiuso che contiene U . Il sottospazio delle funzioni $\mathscr{C}^k(M)$ aventi supporto compatto verrà indicato $\mathscr{C}^k_0(M)$.*

Per costruire funzioni differenziabili non costanti useremo la seguente procedura:

1. Supponiamo di avere $M = A \cup B$ con A e B due aperti. Allora se abbiamo $f : M \to \mathbb{R}$ (anche $f : M \to N$) tale che le restrizioni $f|_A$ e $f|_B$ sono differenziabili allora F è differenziabile: passando a coordinate si riduce al caso in cui M sia una aperto di $\mathbb{R}^n$, si ricorda poi che la differenziabilità si riduce ad una nozione locale per ogni punto $p \in M$, ora o A o B è intorno di p.

2. Si supponga di avere una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che il *suppf* sia un compatto C o più in generale un chiuso in M. Definiamo

$$g(x) = \begin{cases} g(x) = f(x),\ x \in A \\ g(x) = 0, x \in M \setminus C. \end{cases}$$

Applicando le considerazioni precedenti si prova che g è differenziabile. Si ottiene una immersione di $\mathscr{C}^k_0(A)$ in $\mathscr{C}^k_0(M)$.

3. Sia U un intorno coordinato di $p \in M$ e sia $\varphi(U) = W$. Se h è una funzione differenziabile a supporto compatto contenuto di W $h \cdot \varphi$ è una funzione a supporto compatto regolare di U, estendendola a zero otteniamo una funzione regolare su M. Quindi utilizzando la carta coordinata abbiamo una immersione di $\mathscr{C}_0^k(W) \to \mathscr{C}_0^k(M)$.

4. Costruiamo funzioni $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ cioè funzioni lisce aventi supporto compatto, poniamo:

$$\alpha(t) = g(x) = \begin{cases} \exp(\frac{-1}{t}), & t > 0 \\ \alpha(x) = 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

   La funzione α è liscia inoltre $\alpha(t) > 0$ per $t > 0$ quindi $supp(\alpha) = [0, +\infty)$.

   Poi definiamo
$$\beta(t) = \frac{\alpha(t)}{\alpha(t) + \alpha(1-t)}.$$

   Si ha $supp(\beta) = [0, +\infty)$ e $\beta(t) \equiv 1$ per $t \geq 1$.

   Infine definiamo
$$\gamma(t) = \beta(t+2)\beta(2-t)$$

   Si ha $supp(\gamma) = [-2, 2]$ e inoltre $\gamma(t) \equiv 1$ per $t = [-1, 1]$ ha supporto compatto inoltre è costante nell'intorno dell'origine.

5. Se indichiamo con $||x||$ per $x \in \mathbb{R}^n$ l'usuale norma euclidea e poniamo

$$\rho(x) = \gamma(||x||^2),$$

   la funzione ρ ha supporto compatto: $\rho \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il suo supporto è contenuto nel disco di centro l'origine e raggio 2, mentre $h(x) \equiv 1$ nella palla unitaria.

Utilizzando diffeomorfismi (le dilatazioni e traslazioni sono sufficienti), possiamo costruire funzioni aventi supporto compatto e eguali alla costante 1 in intorni di ogni punto di $\mathbb{R}^n$ quindi di ogni varietà.

Le precedenti costruzioni si possono ulteriormente perfezionare quando le varietà soddisfano il secondo assioma di numerabilità e cioé esiste una base numerabile della topologia. Questo è equivalente a richiedere che ammettano un atlante numerabile. Un risultato sorprendente (ma non così utile perché gli aperti sono sconnessi) afferma che tali varietà hanno anche un atlante con un numero finito di carte. Si ha il seguente importante risultato:

Proposizione 1.1.4.2. *Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di una varietà M avente il secondo assioma di numerabilità. Allora esistono delle funzioni regolari positive $\rho_i : M \to \mathbb{R}$ tali $C_i = supp(\rho_i) \subset U_i$ e tali che per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno W di p che interseca solo un numero finito di C_i. Inoltre:*

$$\sum_i \rho_i \equiv 1.$$

La collezione di funzioni ρ_i si dice partizione dell'unità associata al ricoprimento $\mathcal{U}$, per la dimostrazione si rimanda al testo [8] o [2].

Se $f : M \to \mathbb{R}$ è regolare allora scelti un ricoprimento coordinato, $\mathcal{U} = \{U_i\}$, e un'associata partizione dell'unità, ρ_i, possiamo definire $f_i = \rho_i \cdot f$ allora $supp(f_i) \subset U_i$ e vale:

$$f = \sum_i f_i.$$

Abbiamo localizzato le funzione f scrivendola come somma di funzioni avente supporto in aperti coordinati.

Ipotesi 1.1.4.3. *Da ora in avanti, salvo avviso, le varietà differenziali avranno sempre il secondo assioma di numerabilità.*

Esercizi 1.1.4.4. *Supponiamo M varietà C^∞:*

1. *Si dimostri che somme e prodotti di funzioni $\mathscr{C}^\infty$ sono ancora di classe $\mathscr{C}^\infty$. Questo definisce una struttura di anello in $C^\infty(M)$.*

2. **Germi di funzioni** *Fissato $p \in M$, una funzione liscia definita in un intorno di p è una coppia (f, U) con U aperto di M e $f \in C^\infty(U)$. Diremo che due funzioni lisce (f, U) e (g, V) sono equivalenti se esiste un intorno aperto W tale che $f|_W = g|_W$. Il quoziente $G_p = \mathscr{C}_p^\infty$ è lo spazio dei germi delle funzioni lisce in p. Si dimostri (utilizzando restrizioni) che la somma e il prodotto definiscono una struttura di anello in G_p.*

3. *Si dimostri che la restrizione $\mathscr{C}_M^\infty \to \mathscr{C}_p^\infty$ è applicazione suriettiva, caratterizzare il nucleo.*

4. *Sia $M = \mathbb{R}^n$ dimostrare che gli sviluppi di Taylor in p delle funzioni dipendono solo dal germe di tale funzione (cioè dalla classe di equivalenza di tale classe).*

5. *Dire se lo sviluppo di Taylor caratterizza il germe di una funzione $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.*

1.1.5 Sottovarietà e varietà con bordo

In questa sezione daremo la definizione di sottovarietà e di varietà con bordo. Ricordiamo che tutti i nostri spazi sono separati. Tali nozioni saranno discusse in maggior dettaglio in una lezione seguente. Indichiamo con M una varietà differenziale di classe k e dimensione m.

Definizione 1.1.5.1. *Un sottospazio N di M è una sottovarietà differenziale di dimensione n se per ogni punto $p \in N$ esiste un intorno coordinato (U, φ) di p, $p \in U(p)$ tale che se*

$$\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_m(q))$$

allora

$$N \cap U = \{q \in U : x_{n+1}(q) = \dots, x_m(q) = 0).$$

La proiezione $\psi_p : U(p) \to \mathbb{R}^n$

$$\psi_p(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$$

definisce un intorno coordinato di $p \in N$. Al variare di $p \in N$ l' atlante $\{N \cap U(p), \psi_p\}$ è di classe k.

Esercizi 1.1.5.2. *a) Sia $N \subset M$ una sottovarietà si dimostri che l'inclusione è funzione differenziabile.*

b) Sia $i : N \to M$ una applicazione differenziabile iniettiva, dire se $i(N)$ è sottovarietà di M.

c) Dimostrare che la sfera S^n è sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Veniamo ora alla definizione di varietà con bordo. Ricordiamo che su una varietà gli aperti coordinati sono omeomorfi ad aperti dello spazio euclideo. La struttura differenziabile è invece indotta dalla regolarità dei cambiamenti di coordinate. Le varietà sono modellate su $\mathbb{R}^n$. Intuitivamente si vorrebbe che le varietà con bordo siano localmente diffeomeomorfe alla chiusura di aperti regolari di $\mathbb{R}^n$. Il modello base di aperti con bordo regolare è il semispazio chiuso $U^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$. Allora le varietà con bordo sono degli spazi i cui punti interni sono modellati su $\mathbb{R}^n$ e i cui punti di bordo sono modellati su $U^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$. Quindi una varietà con bordo è il dato di $M = M^0 \cup \partial M$ e di un atlante $\{U_i, \varphi_i\} \cup \{V_j, \psi_j\}$:

1. M^0 è un aperto denso, ∂M è la frontiera di M^0;
2. $\{U_i, \varphi_i\}$ è un atlante di M^0 che rende M^0 una varietà di dimensione n;
3. V_j sono intorni dei punti di ∂M;
4. $\psi_j : V_j \to U^+$ sono omeomorfismi;
5. $\psi_j(V_j \setminus \partial M) \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$;
6. $\psi_j(V_j \cap \partial M) \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$;
7. $\{\psi_j : (V_j \setminus \partial M) \to \mathbb{R}^n\}$ sono carte compatibili con le $\{U_i, \varphi_i\}$;
8. $\gamma_j = \pi\psi_j$ ristrette a $V_j \cap \partial M$ definiscono un atlante di ∂M.

Tutti i cambiamenti di carta di $\{U_i, \varphi_i\}$ e a $\{V_j \cap \partial M, \gamma_i\}$ si richiedono regolari.

Esercizi 1.1.5.3. *a) Dire per quali valori di $0 \leq r \leq s$ $C_{r,s} \subset \mathbb{R}^n$*

$$C_{r,s} = \{x : r \leq ||x|| \leq s\}$$

una varietà con bordo di dimensione n.

b) Dire se $\mathbb{R} \setminus [0, 1)$ è varietà con bordo .

c) Dire se il prodotto di due varietà con bordo è varietà con bordo.

1.2 Spazio Tangente

In questa lezione introdurremo lo spazio tangente ad un punto di una varietà. Daremo le due presentazioni principali, quella geometrica, che utilizza le curve e in seguito quella algebrica che utilizza il concetto di derivazione.

1.2.1 Spazio tangente in un punto: curve

Sia M una varietà differenziale di dimensione m di classe $k \geq 1$, sia $\mathcal{I}$ un intervallo aperto della retta reale.

Definizione 1.2.1.1. *Una curva di* M *(parametrizzata) è una applicazione differenziabile* $x : \mathcal{I} \to M$ *di classe* $\mathscr{C}^k$*. Se* $0 \in \mathcal{I}$ *se* $x(0) = p$ *diremo che la curva* $x(t)$ *ha origine in* $p \in M$*.*

Utilizzando carte coordinate vogliamo ora poter dire quando due curve, $x : \mathcal{I} \to M$ e $y : \mathcal{J} \to M$, con origine in p sono ivi tangenti. Sia (U, φ) un aperto coordinato contenente p. Esistono allora intorni aperti di $0 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ e $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ tali che $x(\mathcal{I}') \subset U$ e $y(\mathcal{J}') \subset U$. Componendo con la carta coordinata abbiamo due curve di $\mathbb{R}^m$:

$$X(t) = \varphi(x(t)) : \mathcal{I}' \to \mathbb{R}^m \quad Y(t) = \varphi(y(t)) : \mathcal{J}' \to \mathbb{R}^m$$

Si noti che $X(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ e $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$ sono curve con origine in $\varphi(p)$, i vettori tangenti in tale punto sono rispettivamente $X'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_m(0))$ e $Y'(0) = (y'_1(0), \dots, y'_m(0))$, e le due curve sono tangenti se $X'(0) = Y'(0)$. Diremo allora che $x(t)$ e $y(t)$ sono tangenti in p se $X'(0) = Y'(0)$. Si verifica immediatamente che la tangenzialità non dipende dalla carta coordinata scelta e definisce una relazione di equivalenza nell'insieme $\Omega(p)$ l'insieme di tutte le curve di $\mathbb{R}^m$ aventi origine in M.

Definizione 1.2.1.2. *(* **Geometrica***)*
Lo spazio tangente

$$T_p = T_{M,p}$$

di p *a* M *è lo spazio quoziente di* $\Omega(p)$ *per la relazione di di equivalenza data dalla tangenzialità in* p*.*

L'applicazione

$$x(t) \to \varphi(x)'(0)$$

definisce un isomorfismo

$$c : T_p \to \mathbb{R}^n$$

e definisce una struttura di spazio vettoriale su T_p. Allora un vettore $v \in T_p$ è la classe di equivalenza

$$v = [x(t)]$$

di una curva avente origine in p.

Ora se $F \in C^k(M, N)$ $(k \geq 1)$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^k$ la composizione $x(t) \to F(x(t))$ definisce un'applicazione

$$F_* : \Omega(p) \to \Omega(F(p))$$

Si ha ora che se due curve $x(t)$ e $y(t)$ sono tangenti allora $F(x(t))$ e $F(y(t))$ sono tangenti. Allora è definita una applicazione sugli spazi tangenti:

Definizione 1.2.1.3. *L'applicazione di composizione* F_* *definisce una applicazione*

$$DF_p : T_{M,p} \to T_{N,f(p)}.$$

L'applicazione DF_p *è il differenziale di* F *in* p*.*

Esercizi 1.2.1.4.

Identificare la classe $0 \in T_p$.

Dimostrare che DF_p *è lineare.*

Dimostrare che se $DF_p = 0$ *in ogni punto e* M *connessa allora* F *è costante.*

1.2.2 Spazio tangente in un punto: derivazioni

Ora assumeremo che M sia una varietà $\mathscr{C}^\infty$, Ricordiamo che abbiamo definito in 1.1.4.4 lo spazio $G_p = \mathscr{C}^\infty(M)_p$, dei germi delle funzioni lisce di $p \in M$. Si noti che G_p è uno spazio vettoriale reale.

Definizione 1.2.2.1. *Una derivazione in* p *è una applicazione* $X : G_p \to \mathbb{R}$ *tale che*

$X(f+g) = X(f) + X(g)$

$X(\lambda) = 0$ *per ogni costante* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$.

Si osservi che X è lineare: infatti se λ è una costante allora: $X(\lambda \cdot f) = \lambda X(f) + f(p)X(\lambda) = \lambda X(f)$.

Allora una derivazione è un elemento del duale di G_p che ha la regola di Leibnitz rispetto alla moltiplicazione di funzioni. Sia $D_p = D_{M,p}$ l'insieme delle derivazioni in p Se X e Y sono due derivazioni in p, $X + Y$ e λX è derivazione. Allora le derivazioni in p formano uno spazio vettoriale.

Il seguente lemma permette di calcolare la dimensione di D_p

Lemma 1. *Sia* $U \subset \mathbb{R}^m$ *un aperto convesso e* $p \in U$ *sia* $f \in C^\infty(U)$. *Fissato un punto* $p \in U$ *esistono funzioni* $g_i \in C^\infty(U)$ *tali che*

$$f(x) - f(p) = (x_i - x_i(p))g_i(x) \tag{1.2}$$

e $g_i(0) = \partial f/\partial x_i(p)$.

Dimostrazione. Si utilizza la versione integrale del resto di Taylor. Mediante la traslazione $x_i - x_i(p)$ possiamo supporre $x_i(p) = 0$

$$f(x) - f(p) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big(f(tx_1, \ldots, tx_n)\big)dt = \sum_i x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$$

Quindi $f(x) - f(p) = \sum_i x_i g_i(x)$, dove

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt.$$

□

Proposizione 1.2.2.2. *Sia* $U \subset \mathbb{R}^m$ *un aperto e* $p \in U$ *un suo punto allora le derivate parziali*

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$$

sono una base canonica di $D_{U,p}$. *Quindi vi è una identificazione naturale* $D_{U,p} \equiv \mathbb{R}^m$.

Dimostrazione. Notiamo che ognuna delle $X_i \in D_p$. Inoltre le X_i sono linearmente indipendenti. Supponiamo

$$\sum_i^m a_i X_i = 0$$

allora prendiamo la funzione su U che definisce la $i-$esima coordinata x_i nella base standard (o volendo il suo germe), si ha

$$0 = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i)|p = a_i.$$

Per vedere che le X_i sono un sistema di generatori per D_p sia $X \in D_p$ e siano $X(x_i) = a_i$ Dobbiamo vedere che $Y = X - \sum_{i=1}^m a_i X_i = 0$. Si noti che $Y(x_i) = 0$ e anche $Y(x_i - x_i(p)) = 0$. per ogni i. Ci serve mostrare che $Y(f) = 0$ per ogni germe di funzione f. La restrizione ad un intorno convesso permette l'utilizzo del lemma 1. e la regola di Leibnitz 1.2.2.1:

$$Y(f) = Y(f(p)) + \sum_i Y((x_i - x_i(p))(g_i)) =$$

$$= \sum_i ((x_i(p) - x_i(p)) \cdot Y(g_i) + g_i(p) \cdot Y(x_i - x_i(p))) = 0.$$

Quindi $Y = 0$. □

Attraverso carte coordinate abbiamo che D_p è sempre uno spazio vettoriale di dimensione uguale alla dimensione della varietà.

Proposizione 1.2.2.3. *Per ogni varietà M di dimensione m e $p \in M$, $D_{M,p}$ è uno spazio vettoriale di dimensione m*

Dimostrazione. Scegliamo un aperto coordinato (W, φ) con $p \in W$. Se $\varphi(W) = U$ abbiamo un isomorfismo $\mathscr{C}^\infty(W)_p$, e $\mathscr{C}^\infty(U)_{\varphi(p)}$. Quindi anche un isomorfismo di D_p e $D_{\varphi(p)}$. □

Una base dello spazio vettoriale D_p è data dalla controimmagine delle derivate parziali, se $q = \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m)$

$$\varphi^*(X_i)(g) = \frac{\partial g(\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m))}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

Spesso indicheremo ancora con X_i o con $\frac{\partial}{\partial x_i}$ il vettore corrispondente alla derivazione nel punto p di M invece di $\varphi^*(X_i)$ quando la carta coordinata è fissata.

Le derivate direzionali definiscono una applicazione naturale $\zeta : T_p \to D_p$ se $v = [\gamma(t)]$ è un vettore tangente a $p \in M$, allora $\gamma(t)$ è una curva che ha origine in p. Se f è una funzione regolare definita in un intorno di p possiamo definire (mediante restrizioni o utilizzando la nostra famosa convenzione)

$$\zeta(v)(f) = \frac{df(\gamma)}{dt}(0)$$

Si verifica subito che $\zeta v(f)$ è ben definita e che $\zeta(v)$ è una derivazione. Abbiamo:

Proposizione 1.2.2.4. *L'applicazione ζ è biettiva e definisce una identificazione naturale tra T_p e D_p.*

Dimostrazione. Utilizzando aperti coordinati ci si riduce a considerare il caso di un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se e_i è la base standard di $\mathbb{R}^n$ e $v_i = [\gamma_i(t) = p + te_i]$ si ha

$$\zeta(v_i) = X_i$$

Questo definisce l'isomorfismo canonico. □

Da ora in poi identificheremo le derivazioni con lo spazio tangente e useremo sia la descrizione geometrica che quella algebrica.

Nei seguenti esercizi si troverà un'altra descrizione di T_p.

Esercizi 1.2.2.5.

Sia M una varietà $p \in M$ un suo punto. Si considerino $\mathcal{M} = \{f \in C^\infty(M) : f(p) = 0\}$. Dimostrare che $\mathcal{M}$ è un ideale di $C^\infty(M)$.

Dimostrare che ogni derivazione X in p definisce un funzionale lineare su $\mathcal{M}$.

Dimostrare che $X(\mathcal{M}^2) = 0$ dove gli elementi di$\mathcal{M}^2$ sono le funzioni che si annullano di ordine almeno 2 in p.

Dimostrare che D_p è isomorfo al duale dello spazio vettoriale

$$V = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2}.$$

Concludiamo questa sezione dando l'interpretazione del differenziale di una funzione differenziale utilizzando le derivazioni:

Se $F : M \to N$ abbiamo per composizione un'applicazione $F^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ allora se $X \in D_p = T_p$ possiamo definire $DF_p(X) \in T_{F(p)} = D_{F(p)}$ come la derivazione:

$$DF_p(X)(g) = X(F(g)) = X(F^*(g)). \tag{1.3}$$

Lasciamo al diligente studente verificare che le due definizioni di differenziale date coincidono. Enunciamo il seguente semplice, ma fondamentale risultato.

Proposizione 1.2.2.6. *Siano X, M e N varietà $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$ siano $G : X \to M$ e $F : M \to N$ regolari di ordine k*

$$D(F \circ G) = DF \circ DG$$

Dimostrazione. Si utilizza ancora la regola di derivazione delle funzioni composte. Utilizzando le derivazioni non vi è neppure bisogno di utilizzare le coordinate locali. □

1.2.3 Fibrato Tangente

Sia M una varietà di classe $k \geq 1$ e dimensione m. Lo spazio o il fibrato tangente è per definizione l'unione degli spazi tangenti nei punti di una varietà M :

$$T_M = \bigcup_{p \in M} T_{M,p}.$$

Si ha allora una proiezione naturale, detta fibrazione

$$q : T_M \to M$$

dove $q(v) = p \iff v \in T_p$. I vettori di T_p sono talvolta detti applicati a p. Vedremo che T_M ha una struttura naturale di varietà $\mathscr{C}^{k-1}$ ($\mathscr{C}^\infty$ se $k = \infty$) di dimensione $2m$.

Se $W \subset \mathbb{R}^m$ è un aperto allora vi è un isomorfismo naturale tra $T_{W,p}$ e $\mathbb{R}^m$. Gli elementi $X_i, i = 1, \dots, n$ della base naturale corrispondono alle curve $p + te_i$ e, nella versione algebrica, a $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Più in generale un vettore $v \in \mathbb{R}^m$ corrisponde a $X_v = [p + tv]$. Abbiamo quindi una identificazione naturale :

$$T_W \equiv W \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}.$$

Questa osservazione permetterà di dare coordinate allo spazio tangente.

Anticipiamo dapprima qualche considerazione sul differenziale di una funzione a valori in $\mathbb{R}^s$. Se $F : M \to \mathbb{R}^s$

$$DF : T_M \to T_{\mathbb{R}^s} = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s.$$

La proiezione sulle primo fattore è la funzione F. Se $\pi : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ è la proiezione sul secondo fattore $\pi(v, w) = w$. Ponendo

$$dF = \pi DF,$$

otteniamo per $v \in T_p$

$$DF_p(v) = (F(p), dF(p)v).$$

Se in particolare

$$f : M \to \mathbb{R}$$

è di classe $\mathscr{C}^k$, cioè $f \in \mathscr{C}^k(M)$. Allora possiamo interpretare il differenziale di f come

$$Df_p(v) = (f(p), df_p \cdot v), \tag{1.4}$$

per ogni vettore $v \in T_p$. Notiamo che $df(p) : T_p \to \mathbb{R}$ è lineare e quindi:

$$df(p) \in T_p^*$$

dove T_p^* è lo spazio duale a T_p. Se $X \in T_p$ è interpretato come derivazione (se volete essere coerenti fino in fondo supponete $k = \infty$): si ha per costruzione:

$$df(X) = X(f). \tag{1.5}$$

Esercizi 1.2.3.1. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$ e $F : A \to R^s$ di classe $\mathscr{C}^k$, $k > 1$.*

1. *Dimostrare che dF è l'usuale Jacobiano della funzione f.*

2. *Studiare $d(dF)$.*

Se $\varphi : U \to \mathbb{R}^M$,

$$\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_m(p)),$$

è una carta coordinata $dx_i, i = 1, \dots, m$ definisce una base in T_p^* duale della base $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 1 \quad dx_i \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \text{ se } \ i \neq j.$$

Il differenziale di φ definisce una biezione:

$$D(\varphi) = (\varphi, d\varphi) = (\varphi, dx_1, ..., dx_n) : T_U \to T_W \equiv W \times \mathbb{R}^m. \tag{1.6}$$

Notiamo infine che $W \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}$ è un aperto di $\mathbb{R}^{2m}$. La formula 1.6, definisce coordinate per T_M. Ecco il dettaglio della costruzione della varietà fibrato tangente:

1. **La topologia**. Vogliamo dare a T_M la topologia più debole che rende continua le $D(\varphi)$: se
$$B \subset W \times \mathbb{R}^m$$
è un aperto allora $B_\varphi = D(\varphi)^{-1}(B)$ deve essere aperto. Definiamo la topologia $\mathcal{T}$ avente come base B_φ al variare delle carte φ e degli aperti B.

2. **Lo spazio** $(T_M, \mathcal{T})$ **è di Hausdorff**. Infatti due vettori applicati in punti diversi sono separati da due carte coordinate che non si intersecano. Due vettori diversi applicati allo stesso punto p sono invece separati in un aperto coordinato $\{U, \varphi\}$ $p \in U$ perché $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ è di Hausdorff.

3. **Carte coordinate**. Le funzioni (vedere 1.6), $D\varphi$ definiscono tautologicamente delle carte coordinate, T_M risulta una varietà topologica di dimensione $2m$.

4. **Cambiamento di coordinate**. Se (U, φ) e (V, ψ) sono carte di M, posto $W' = \varphi(U \cap V)$ e $W'' = \psi(U \cap V)$ abbiamo
$$D\varphi : T_{U \cap V} \to W' \times \mathbb{R}^m,$$
$$D\psi : T_{U \cap V} \to W'' \times \mathbb{R}^m.$$
Notiamo che $D\psi \cdot (D\varphi)^{-1} = D(\psi \cdot \varphi^{-1})$; allora il cambiamento di coordinate è definito da:
$$D\psi \cdot (D\varphi)^{-1} = (\psi \cdot \varphi^{-1}, d(\psi \cdot \varphi^{-1}) : W' \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{2m}. \tag{1.7}$$

Ora
$$d(\psi \cdot \varphi^{-1})$$
è lo jacobiano di $\psi \cdot \varphi^{-1}$ che è differenziabile di classe $\mathscr{C}^{k-1}$ ($\mathscr{C}^\infty$ se $k = \infty$).

In conclusione abbiamo:

Proposizione 1.2.3.2. *Con le carte definite in 1.6* $\{T_M, \mathcal{T}, T_U, D(\varphi)\}$ *è una varietà di dimensione* $2m$ *e classe* $\mathscr{C}^{k-1}$ *(*$\mathscr{C}^\infty$ *se* $k = \infty$*). Inoltre la fibrazione* $q : T_M \to M$ *è differenziabile di classe* $\mathscr{C}^{k-1}$

Lo spazio tangente T_M è allora in maniera naturale una varietà differenziale inoltre, praticamente per costruzione:

Proposizione 1.2.3.3. *Se* M *e* N *sono varietà di classe* $\mathscr{C}^k \geq 1$ *e* $F \in \mathscr{C}^k(M,N)$*, allora* $DF \in \mathscr{C}^k(M,N)$*, il differenziale* DF *della* F *è di classe* $k-1 : DF \in \mathscr{C}^{k-1}(T_M, T_N)$*.*

Esercizi 1.2.3.4.

1. *Siano* f *e* g *in* $\mathscr{C}^\infty(M)$ *allora si ha* $d(f+g) = df + dg$, $d(fg) = fdg + gdf$.
2. *Dimostrare che* T_{S^1} *è diffeomorfo a* $S^1 \times \mathbb{R}$.
3. *Dimostrare che* T_{S^3} *è diffeomorfo a* $S^3 \times \mathbb{R}^3$.
4. *Dire se* T_{S^2} *è diffeomorfo a* $S^2 \times \mathbb{R}^2$.
5. *Dimostrare che se* $A \subset M$ *è una sottovarietà e* $\chi : A \to N$ *è l'inclusione allora* $D\chi(T_A) \subset T_N$ *è una sottovarietà di* T_N *diffeomorfa a* T_A.

1.2.4 Campi vettoriali

Siano M e N varietà di $\mathscr{C}^k$, $k > 0$, e $f \in \mathscr{C}^k(M,N)$ una applicazione suriettiva. Una sezione (differenziabile) di f è una applicazione $g : \mathscr{C}^k(N,M)$ tale che $g \cdot f = id_M$. Una sezione è allora una inversa parziale della f.

Definizione 1.2.4.1. *Un campo vettoriale è una sezione della fibrazione* $q : T_M \to M$*. Più in generale se* $Y \subset M$ *è una sottovarietà e* $T_{M,Y} = q^{-1}(Y)$ *un campo vettoriale di* M *definito lungo* Y *è una sezione di* $q : T_{M,Y} \to Y$*.*

Un campo vettoriale assegna in modo differenziabile ad ogni punto un vettore applicato in tale punto. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, un campo vettoriale X definito su U ha la forma:

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

dove le a_i sono funzioni differenziabili. I campi vettoriali possono allora essere considerati come funzioni lineari $V : \mathscr{C}^k(M) \to \mathscr{C}^{k-1}(M)$ tali che per ogni coppia di funzioni f e g.

$$V(fg) = fV(g) + gV(f) \tag{1.8}$$

Quando $k = \infty$ sono allora operatori differenziali (del primo ordine) su $\mathscr{C}^\infty(M)$ e l'equazione 1.8 di Leibnitz determina i campi vettoriali. Intatti per ogni $p \in M$ $X_p(f) = X(f)(p)$ è una derivazione. Si osservi che la somma di due campi vettoriali X e Y è un campo vettoriale $X + Y$ e che il prodotto di una funzione regolare f per X è un campo vettoriale.

Definizione 1.2.4.2. *Sia* M *varietà* $\mathscr{C}^\infty$*, lo spazio dei campi vettoriali* $\mathscr{C}^\infty$ *verrà indicato con* $\mathcal{X}^\infty(M)$

Esercizi 1.2.4.3. *Sia M varietà $\mathscr{C}^\infty$*

1) Si dimostri che la composizione XY di due campi vettoriali non è in generale un campo vettoriale.

2) Si dimostri che le composizioni XY e YX di due campi vettoriali non sono in generale uguali.

Sia M varietà $\mathscr{C}^\infty$ prendiamo X e Y in $\mathcal{X}^\infty(M)$ si ha che

$$[X,Y] = XY - YX \in \mathcal{X}^\infty(M).$$

Abbiamo definito il bracket o parentesi di Lie e cioè l'operatore bilineare.

$$[,] : \mathcal{X}^\infty(M) \times \mathcal{X}^\infty(M) \to \mathcal{X}^\infty(M) \tag{1.9}$$

Proposizione 1.2.4.4. *Se X, Y e Z sono campi vettoriali, e $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ allora valgono:*

1) $[XY] = -[Y,X]$.

2) (identità di Jacobi) $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$.

3) $[fX,Y] = f[X,Y] - Y(f)X$

Concludiamo la sezione con l'espressione della parentesi di Lie in coordinate locali, cioè in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si ha

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0.$$

Dati $X = a_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$ e $Y = b_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + b_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$, posto $[X,Y] = c_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + c_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$ abbiamo allora:

$$c_i = \sum_j (a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}).$$

Riprenderemo in seguito lo studio dei campi vettoriali e delle parentesi di Lie. Tale operazione è probabilmente, insieme alla derivata esterna di forme, la struttura algebrica più importante per una varietà differenziale.

Sia A una k-algebra. Una derivazione di A è un'applicazione lineare $D : A \to A$ tale che

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

Proposizione 1.2.4.5. *Se $X \in \mathcal{X}^\infty(M)$ allora $f \mapsto Xf$ è una derivazione dell'algebra $C^\infty(M)$. Viceversa, ogni derivazione di $C^\infty(M)$ è data un campo vettoriale univocamente determinato.*

Dimostrazione. La prima affermazione è già contenuta nella formula (1.8). Supponiamo invece che $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ sia una derivazione. Segue immediatamente dalla definizione che $D(1) = 2D(1)$ (1 indica la funzione costante 1). Dunque si annulla sulle funzioni costanti. Dimostriamo che D è un operatore *locale* nel senso seguente: se $f \in C^\infty(M)$ è una funzione che si annulla su un aperto $U \subset M$, allora anche la funzione $D(f)$ si annulla su U. Dato un punto $p \in U$ consideriamo una funzione *cut-off* $\chi \in C^\infty(M)$

che sia uguale ad 1 su un intorno V di p, e che sia identicamente nulla su $M \setminus U$. Allora $f = (1-\chi)f$, dunque

$$D(f) = D\big((1-\chi)f\big) = \big(D(1-\chi)\big)\cdot f + (1-\chi)\cdot D(f).$$

Su V si ha $f = 0$ e anche $\chi = 1$. Dunque $D(f) = 0$ su V. Pertanto $D(f) = 0$ su tutto U, dunque D è un operatore locale. Proseguiamo dimostrando che D è la derivazione associata ad un campo vettoriale di M. Sia $(U, x^1, \dots, x^n)$ una carta di M. L'algebra $C^\infty(U)$ non è una sottoalgebra di $C^\infty(M)$, perchè non tutte le funzioni lisce definite su U si estendono alla varietà M. Tuttavia D induce una derivazione di $C^\infty(U)$. Infatti se $f \in C^\infty(U)$ e $p \in U$, scelta χ come sopra, poniamo

$$D_U(f)(p) = D(\chi f)(p).$$

Questa definizione è indipendente dalla scelta di χ: se χ' è un'altra funzione *cut-off* attorno a p, allora $\chi = \chi'$ su un intorno di p. Dunque $D(\chi f) = D(\chi' f)$ perchè D è un operatore locale. È immediato verificare che D_U è una derivazione dell'algebra $C^\infty(U)$. Poniamo

$$\xi^i = D_U(x^i).$$

Data una funzione f su U ed un punto $p_0 \in U$ di coordinate x_0 esistono funzioni $g_i \in C^\infty(U)$ tali che

$$f(x) = f(x_0) + g_i(x)(x^i - x_0^i) \qquad g_i(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Applicando la (1.8) otteniamo

$$D(f)(p_0) = D_U(f)(p_0) = \sum_{i=0}^{n} \xi^i(x_0)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Ciò dimostra che sull'aperto U la derivazione D è indotta da uno ed un solo campo vettoriale: il campo $X = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Su un altra carta l'operatore D è indotto da un altro campo. Ma per l'unicità questi due campi devono coincidere. Pertanto il campo X è globalmente definito.

Q.E.D.

1.3 Studio del differenziale di una funzione

1.3.1 Teorema della funzione implicita

Abbiamo la seguente versione del teorema della funziona inversa:

Teorema 1.3.1.1. Funzione inversa *Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ un aperto $f : U \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe $\mathscr{C}^k$. Se $p \in U$ è tale che $df(p)$ è invertibile allora esiste un aperto $W \subset U$ tale che 1) $f(W) = V$ è un aperto di $\mathbb{R}^m$ e 2) la restrizione $f : W \to V$ è un diffeomorfismo di classe $\mathscr{C}^k$.*

La funzione $f : W \to R^m$ definita in 1.3.1.1 è una carta compatibile con la struttura differenziale standard.

Definizione 1.3.1.2. *Se $f : M \to N$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^k$ diremo che f è un diffeomorfismo locale se per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno aperto $p \in U$ tale che : a) $f(U) = V$ è un aperto di N e b) $f : U \to V$ è un diffeomorfismo.*

Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo locale allora $\dim M = \dim N$. Il teorema della funzione inversa 1.3.1.1 si riscrive allora:

Proposizione 1.3.1.3. *Sia $f : M \to N$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^k$, f è diffeomorfismo locale se e solo se $DF(p) : T_p \to T_{F(p)}$ è biettivo per ogni $p \in M$.*

Le inclusioni e i rivestimenti di aperti sono diffeomorfismi locali che non in generale globali. La mappa esponenziale $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, è, per esempio, diffeomorfismo locale non globale, la sua restrizione $\exp : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ è un diffeomorfismo locale suriettivo, ma non un rivestimento.

Teorema 1.3.1.4. Funzioni implicite: versione suriettiva. *Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ un aperto, $p \in U$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n)$ di classe $\mathscr{C}^k$, tale che $f(p) = 0$. Supponiamo che $df(p)$ sia suriettivo. Allora esistono: a) un intorno aperto W di p, $p \in W \subset \mathbb{R}^m$, e b) un diffeomorfismo locale $\varphi : W \to \mathbb{R}^m$ tale che*

$$f(\varphi(x_1, \dots, x_m)) = (x_1, \dots, x_n).$$

Dimostrazione. A meno di permutazione negli indici possiamo supporre che

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

sia invertibile in un intorno A dello 0. Allora

$$\rho(x_1, \dots, x_m) = (f(x), x_{n+1}, \dots, x_m)$$

è un diffeomorfismo locale : $\rho(p) = 0$. Allora esiste un intorno W, $0 \in W$ e tale che $\rho^{-1} : W \to \mathbb{R}^m$ esiste ed è regolare. Si pone allora $\varphi = \rho^{-1}$. □

Teorema 1.3.1.5. Funzioni implicite: versione iniettiva. *Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ un aperto $p \in U$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n)$ di classe $\mathscr{C}^k, k > 0$. Sia $q \in \mathbb{R}^n$ e $p \in U$ $f(p) = q$. Supponiamo che $df(p)$ sia iniettivo. Allora esiste un intorno aperto W , $q \in W \subset \mathbb{R}^n$, e un diffeomorfismo locale $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ tale che: $\varphi(q) = 0$ e*

$$\varphi(f(x_1, \dots, x_m)) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

1.3.2 Trasversalità, Funzioni implicite

In questa lezione vogliamo descrivere una versione globale del teorema della funzione implicita e il suo legame con le sottovarietà. Siano M e N due varietà di dimensione m e n di classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$. Sia $F : M \to N$ una funzione differenziabile $F \in \mathscr{C}^k(M, N)$.

Definizione 1.3.2.1. *Un punto $p \in M$ si dice un* punto regolare *di F se DF_p è suriettivo. Se invece DF_p non è suriettivo p è detto* punto critico *di F. Un punto $s \in N$ si dice* valore regolare *se ogni $p \in F^{-1}(s)$ è un punto regolare di F.*

Si noti l'ambiguità linguistica : se $F^{-1}(q) = \emptyset$ allora q è un valore regolare di F. Per ovviare a questo diremo che q è valore regolare proprio se $Z = F^{-1}(q) \neq \emptyset$. Da 1.3.1.4 segue:

Lemma 2. *Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ ed $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funzione liscia. Se $0 \in \mathbb{R}^n$ è un valore regolare proprio di f, allora $f^{-1}(0)$ è una sottovarietà di U di dimensione $m - n$.*

Dimostrazione. Nella carta definita dalla φ

$$Z \cap \varphi(W) = \{x_1 = \ldots = x_n = 0\}.$$

□

Più in generale sia $A \subset N$ una sottovarietà di dimensione a e $\chi : A \to N$ l'inclusione. Possiamo identificare lo spazio tangente $T_{A,q}$ con il sottospazio $D\chi T_{A,q}$ di $T_{N,q}$. Diamo la seguente:

Definizione 1.3.2.2. *Una sottovarietà A di N è detta trasversa alla $F : M \to N$ se per ogni $p \in M$ tale che $q = F(p) \in N$ allora:*

$$T_{N,q} = DF_p(T_{M,p}) + T_{A,q}$$

Se pensiamo ai punti come varietà di dimensione 0 un punto è trasverso se e solo se è valore regolare.

Proposizione 1.3.2.3. *Sia $F : M \to N$ una applicazione differenziabile di classe $\mathscr{C}^k$ tra varietà di dimensione m e n. Sia A una sottovarietà di N di dimensione a. Se A è trasversa ad F e $Z_A = F^{-1}(A)$ è non vuoto, allora Z_A è una sottovarietà di M di dimensione $m - n + a$. In particolare se q è un valore regolare proprio allora $F^{-1}(q)$ è una sottovarietà di M di dimensione $m - n$.*

Dimostrazione. Si noti che per ipotesi $m + a - n \geq 0$. Fissiamo $p \in A$ e $F(p) = q$. Esiste allora carta coordinata $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, tale che:

1) $\psi(s) = (y_1(s), \ldots, y_a(s), y_{a+1}(s), \ldots, y_n(s))$,
2) $\psi(q) = (0, \ldots, 0)$,
3) $A \cap V = \{s \in V : y_i(s) = 0,\ i = a + 1, \ldots, n\}$.

Poniamo $H = \{y \in \mathbb{R}^n : y_i = 0,\ i = a + 1, \ldots n\}$ si ottiene allora

$$A \cap V = \psi^{-1}(V' \cap H),\ V' = \psi(V).$$

Prendiamo un aperto coordinato in M, (U, φ), con $p \in U$ e $U \subset F^{-1}(V)$, tale che $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ e $\varphi(p) = (0, \ldots, 0)$. Definiamo allora

$$f = \psi F \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

Allora $\varphi(Z_A \cap W) = f^{-1}(H \cap \psi(V))$. La trasversalità di A rispetto ad F diventa nelle carte locali la trasversalità di H $(H \cap V)$ rispetto alla f. In coordinate:

$$f(x_1,\dots,x_m) = \begin{cases} y_1(x_1,\dots,x_m) \\ \dots \\ y_a(x_1,\dots,x_m) \\ y_{a+1}(x_1,\dots,x_m) \\ \dots \\ y_n(x_1,\dots,x_m) \end{cases}$$

Sia π la proiezione sulle ultime $n-a$ coordinate:

$$\pi(y_1,\dots,y_n) = (y_{a+1},\dots,y_n).$$

Ora la composizione $g = \pi \cdot f$ ha in 0 un valore regolare: altrimenti f non sarebbe trasversa ad H e $f^{-1}(H \cap V) = g^{-1}(0)$. Il teorema della funzione implicita (ovvero il lemma 2) dimostra che $g^{-1}(0)$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^m$.

□

1.3.3 Valori regolari e punti critici: il lemma di Sard I

In questa lezione vedremo che per funzioni lisce i valori regolari sono densi. Siano allora M e N due varietà $\mathscr{C}^\infty$ di dimensione m e n. Sia $f \in C^\infty(M,N)$, una funzione liscia,

$$C = C_F = \{p \in M : Df_p \text{ non suriettiva}\}$$

l'insieme dei punti critici di F, l'insieme dei valori critici e

$$D = D_f = f(C) \subset N$$

e $R = R_f = N \setminus D$ l'insieme dei valori regolari. Abbiamo il seguente Lemma di Sard o di Sard-Morse (vedere il capitolo 3 di [3]):

Lemma 3. *Se N e M sono $\mathscr{C}^\infty$ e $f \in \mathscr{C}^\infty(M,N)$ allora l'insieme R dei valori regolari di f è denso in N.*

Il lemma di Sard ha una versione quantitativamente più precisa. Per questo ricordiamo che $\mathbb{R}^n$ ha una misura privilegiata, quella di Lebesgue, nel seguito questa sarà indicata con μ. Non esistono misure privilegiate nelle varietà, tuttavia possiamo dare la seguente:

Definizione 1.3.3.1. *Diremo che $K \subset N$ è misurabile se per ogni aperto coordinato (U,φ) $\varphi(U \cap K) \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo la misura di Lebesgue. Un misurabile K ha misura nulla se per ogni carta coordinata :*

$$\mu(\varphi(U \cap K)) = 0.$$

Se (U,φ) e (V,ψ) sono carte coordinate e $K \subset U \cap V$ allora $\varphi(K)$ è misurabile se e solo se $\psi(K)$ è misurabile. Inoltre $\varphi \cdot \psi^{-1}$ è di classe $\mathscr{C}^1$ e allora

$$\mu(\varphi(K)) = \int_{\psi(K)} |\det(d(\varphi \cdot \psi^{-1}))| d\mu,$$

Quindi $\varphi(K)$ ha misura nulla se e solo se $\psi(K)$ ha misura nulla. Utilizzando ancora la formula del determinante Jacobiano (o un ragionamento Lipschitziano [3]) abbiamo che se K è un sottoinsieme di misura nulla di un aperto $A \subset R^n$ è un aperto $F : A \to \mathbb{R}^n$ è $\mathscr{C}^1$, allora $F(K)$ ha misura nulla.

Esercizi 1.3.3.2. *Siano M e N sono varietà C^1 di dimensione m e n e sia $F \in \mathscr{C}^1(M, N)$.*

1) Dimostrare che se $n = m$ e $C \subset M$ ha misura nulla allora anche $f(C) \subset N$ ha misura nulla. (suggerimento si utilizzi il fatto che M ha una base numerabile per ridursi al caso locale)

2) Dimostrare che se $n > m$ allora F(M) ha misura nulla. (Suggerimento si consideri $M' = M \times \mathbb{R}^{n-m}$ e $G : M' \to N$, $G(p, v) = f(p)$.)

Possiamo inoltre dimostrare:

Lemma 4.

1) Un insieme $S \subset N$ ha misura nulla se e solo se per ogni punto $p \in S$ esiste un intorno N_p coordinato tale che $N_p \cap S$ ha misura nulla.

2) L'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

Dimostrazione. 1) Sia S un misurabile non avente misura nulla, allora esiste una carta coordinata $\mu(\varphi(S \cap U)) > 0$ per una carta $\{U, \varphi\}$. Viceversa supponiamo che ogni punto p di S abbia un intorno aperto N_p tale che $N_p \cap S$ abbia misura nulla. Sia (U, φ) una carta coordinata. Vogliamo dimostrare che $\mu(\varphi(U \cap S)) = 0$. Se non fosse così esisterebbe un compatto $K \subset U$ tale che $\mu(\varphi(K \cap S) > 0$. Ma allora ricoprendo K con un unione finita dei nostri intorni N_p abbiamo che

$$\mu_(\varphi(S \cap N_p \cap K) > 0$$

per qualche p. Questo è in con le nostre ipotesi contraddizione perché $\mu_(\varphi(S \cap N_p)) \geq \mu_(\varphi(S \cap N_p) \cap K)$.

2) Quando $N = \mathbb{R}^n$ segue dalla teoria della misura di Lebesgue. La nostra definizione riduce poi ogni controllo nelle carte coordinate.

□

Lemma 5. *Il complementare di $N \setminus S$ di un insieme di misura nulla $S \subset N$ è denso in N.*

Dimostrazione. Un insieme di una varietà è denso se e solo la sua intersezione con un aperto coordinato è non vuota. Infatti gli aperti coordinati formano una base della topologia.

□

Allora il lemma 3 segue dal seguente più forte:

Lemma 6. (Sard) *Se M e N sono $\mathscr{C}^\infty$ e $f \in \mathscr{C}^\infty(M, N)$ una funzione liscia e sia C l'insieme dei punti critici di f. Allora il sottoinsieme $D = f(C) \subset N$ dei valori critici della f ha misura nulla.*

Per definizione componendo con carte coordinate del lemma 4 possiamo assumere che N sia un aperto di $\mathbb{R}^n$. Il fatto che M abbia una base numerabile di aperti coordinati $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ permette di ridurre la dimostrazione al caso in cui anche M sia un aperto di $\mathbb{R}^m$. Infatti posto $C_i = U_i \cap C$, se per ogni i $D_i = f(C_i)$ ha misura nulla allora anche D ha misura nulla per il lemma 4. Ripetendo lo stesso principio basterà dimostrare il lemma per $M = W$ dove W è un aperto convesso di $\mathbb{R}^m$. Di più basterà verificarlo per le immagini dei punti critici che sono all'interno di i cubi compatti contenuti in W. Se $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m) \in W$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ sufficientemente piccolo

$$I_{\overline{x}}(r) = \{(x_1, \dots, x_m) : |x_i - \overline{x}_i| \le r \ \forall i\} \subset W.$$

Si noti che $I_{\overline{x}}$ è un cubo compatto di lato $2r$ e volume

$$\mu(I_{\overline{x}}(r)) = 2^m r^m.$$

Allora W è ricoperto da un insieme numerabile di cubi compatti $W = \cup_n I_n$ e dovremo dimostrare che $f(I_n \cap C)$ ha misura nulla. In conclusione a meno di cambiamento dilatazioni e traslazioni coordinate possiamo supporre di prendere il cubo standard di lato 1.

$$I^m = [0,1] \times \ldots \times [0,1] = \{(x_1, ..., x_m)\} \in \mathbb{R}^m : \forall 0 \le x_i \le 1 \tag{1.10}$$

Abbiamo visto il seguente lemma di riduzione:

Lemma 7. (Riduzione) *Se possiamo dimostrare che per ogni funzione liscia $f : W \to \mathbb{R}^n$ con $I^m \subset W$, e W aperto convesso di $\mathbb{R}^m$ vale che $\mu(f(C \cap I^m)) = 0$, allora vale il lemma di Sard per tutte le $f \in \mathscr{C}^\infty(M, N)$ dove M e N hanno dimensioni n e m.*

Dobbiamo allora dimostrare la seguente

Proposizione 1.3.3.3. *Sia W un aperto convesso di $\mathbb{R}^m$ che contiene il cubo unitario I^m sia $f : W \to \mathbb{R}^n$ una funzione $\mathscr{C}^\infty$. Sia C l'insieme dei punti critici della f allora $\mu(f(C \cap I^m)) = 0$.*

La dimostrazione procede allora per induzione su n e m nel caso caso del cubo, ma nel passo induttivo assumeremo il teorema vero per tutte le funzioni lisce tra varietà di dimensione $m \le m$ e $n \le n'$, ma $n' + m' < n + m$.

Lemma 8. Passo induttivo. *Sia $f : [0,1] = I \to \mathbb{R}$ una applicazione C^2 definita in un intorno $W \supset [0,1]$ allora $\mu(C \cap I) = 0$.*

Dimostrazione. 1) Esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|f(x) - f(p)| \le M(x-p)^2$$

per ogni punto $p \in C \cap I$ e $x \in I$. Infatti $f'(p) = 0$ e allora

$$f(x) - f(p) = \ (x-p)^2 \int_0^1 \int_0^w (f''(tx + (1-t)p)dtdw$$

Se $M = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$ allora $If(x) - f(p)| \le M(x-p)^2$.

2) Siano x , $y \in I$ e $p \in C \cap I$ tale che $|x-p| \leq r$ e $|y-p| \leq r$ allora

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(p)|+|f(x)-f(p)| \leq M(|x-p|^2+|y-p|^2) \leq 2Mr^2 :$$

$$|f(x)-f(y)| \leq 2Mr^2.$$

3) Riscriviamo la 2) per ogni un intervallo $J \subset I$ qualsiasi di raggio r; se $J \cap C \neq \emptyset$ allora $f(J)$ è contenuto in un intervallo di raggio sr^2 con $s = 8M$. In particolare $\mu f((C \cap J) \leq \mu(f(J)) \leq 2sr^2 = kr^2$, $k = 2r$. Si noti che tale disuguaglianza vale banalmente se $C \cap J = \emptyset$.

4) Abbiamo visto che $\mu f((C \cap I) \leq k$. Suddividiamo $I = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1] = I_1 \cup I_2$ Allora

$$\mu(f((C \cap I)) \leq \mu(f(C \cap I_1) + \mu(f(C \cap I_2)) \leq 2(k(\frac{1}{2})^2) \leq k2^{-1}.$$

Procedendo con le suddivisioni di lunghezza 2^{-n} abbiamo

$$\mu(f((C \cap I)) \leq \sum \mu(f((C \cap I_j)) \leq 2^n(k2^{-2n}) = k2^{-n}.$$

Allora $\mu(f(C \cap I)) = 0$ perché è il suo valore è dominato da una successione infinitesima.

$\square$

Svolto in dettaglio il caso $n = m = 1$ consideriamo il caso generale. Fissiamo $I^m \subset W \subset \mathbb{R}^m$, W un aperto convesso di $\mathbb{R}^m$ e $f : W \to \mathbb{R}^n$ una funzione liscia (C^∞).

Scriviamo la funzione f nelle sue coordinate,

$$f = (f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

Per ogni intero $s > 0$ diremo che la f ha ordine $l \leq s+1$ in $p \in W$ se esistono un i, $1 \leq i \leq n$, e degli indici

$$1 \leq j_1, \ldots, j_s \leq m$$

tali che

$$\frac{\partial^s f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}}(p) \neq 0.$$

Diremo allora che f ha ordine $\geq s$ in p e scriveremo

$$v_f(p) \geq s$$

se tutte le derivate di ordine r, $r \leq s-1$, di ciascuna delle f_j si annullano. Per ogni intero $s \geq 1$ porremo

$$C_s = \{p \in W \ : \ v_f(p) > s\}.$$

Se C è l'insieme dei punti critici di f. Per ogni $s > 0$ abbiamo

$$C \supset C_s \supset C_{s+1}$$

e quindi

$$C = (C \setminus C_1) \bigcup_{j=2}^{s} (C_{j-1} \setminus C_j) \cup C_s$$

Porremo anche $D_s = f(C_s)$:

$$f(C) = D = (D \setminus D_1) \bigcup_{j=2}^{s} (D_{j-1} \setminus D_j) \cup D_s.$$

Indichiamo il cubo di centro p e lato r con $I_p(r)$.

Lemma 9. *Per ogni intero $s > 0$ $s \geq 1$, esiste una costante M tale che $\forall p \in C_s \cap I^m$, $\forall x \in I^m$*

$$||f(x) - f(p)|| \leq M \cdot ||x - p||^s.$$

per ogni $x \in U$. In particolare $\mu(f(I_p(r)) \leq M^n \cdot 2^n r^{n \cdot s}$.

Dimostrazione. Usando ripetutamente la formula di Taylor-Lagrange 1 otteniamo per ogni j

$$f_j(x) - f_j(p) = \sum_{\sum a_{j_k} = s} \prod ((x_{j_k} - \overline{x}_{j_k})^{a_{j_k}}) g_{I,j}$$

$I = a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}$: $\sum a_{j_k} = s$ e le $g_{I,j}$ sono funzione continue. Prendendo i massimi sulle $g_{I,j}$ nel compatto I^m e utilizzando la disuguaglianza di Schwartz otteniamo il lemma. □

Ora ripetiamo il ragionamento fatto nel primo passo di induzione abbiamo che se un cubo K di lato r interseca C_s allora $f(K)$ è contenuto in cubo K' di lato kr^s dove k è una costante che dipende solo da f. In particolare abbiamo:

Lemma 10. *Se $K \subset I^m$ è un cubo di lato r allora $\mu(f(C_s \cap K) \leq cr^s$ dove c è una costante.*

Lemma 11. *Supponiamo*

$$s > \frac{m}{n}$$

allora $f(I^m \cap C_s) = f(I^m) \cap D_s$ ha misura nulla.

Dimostrazione. Suddividiamo il cubo unitario in cubi di raggio

$$\frac{1}{2^k}$$

suddividendo i lati

$$(\{0\} \times \ldots \times I \times \ldots \times \{0\}.$$

Troviamo in questo modo 2^{km} cubi K_i che ricoprono I^m Allora

$$\mu(f(I^m \cap C_s)) \leq 2^{mk} \mu(f(K_i \cap D_s)) \leq 2^{mk} c(\frac{1}{2^k})^{(sn} = c2^{k(m-ns)}.$$

Facendo tendere k ad infinito abbiamo

$$\mu(f(I^m \cap C_s)) = 0$$

se $m - ns < 0$.

□

Corollario 1.3.3.4. *Se $s > \frac{m}{n}$ allora $\mu(D_s) = 0$.*

Dimostrazione. Si ricopre W con un unione numerabile di cubi (7) $\square$

Lemma 12. *Utilizzando le notazioni precedenti per ogni $s > 1$, $\mu(D_{s-1} \setminus D_s) = 0$.*

Dimostrazione. Per un punto $p \in D_{s-1} \setminus D_s$ deve esistere una funzione f_j aventi tutte le derivate parziali di ordine s nulle mentre una di ordine $s+1$ non nulla. Posto

$$g_I(x) = \frac{\partial^s f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s}}(x)$$

Dobbiamo studiare, al variare degli indici, le intersezioni di C con

$$Y_{I,k} = \{g_I(x) = 0,\ \frac{\partial g_I}{\partial x_k} \neq 0\}$$

Per il teorema delle funzioni implicite $Y_{I,k}$ è sottovarietà di dimensione $m-1$ di W. Abbiamo che l'intersezione:

$$Y_{I,k} \cap C$$

abbiamo è contenuta nell'insieme dei punti critici della restrizione

$$f : Y_{I,k} \to \mathbb{R}^n.$$

Infatti il differenziale è la restrizione del differenziale, ma per restrizione una applicazione non suriettiva rimane non suriettiva. Quindi per l'ipotesi induttiva $\mu(f(Y_{I,k} \cap C)) = 0$; variando gli indici abbiamo allora $\mu(D_{s-1} \setminus D_s) = 0$. $\square$

Per concludere il la dimostrazione del lemma di Sard dobbiamo vedere che $\mu(D \setminus D_1) = \mu f(C \setminus C_1) = 0$. Utilizzando il solito principio di riduzione 7 è sufficiente dimostrare il seguente:

Lemma 13. *Per ogni punto $p \in C \setminus C_1$ esiste un intorno A di p aperto in $\mathbb{R}^n$ tale che $\mu(f(C \cap A)) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $p \in C \setminus C_1$ allora abbiamo che $df(q)$ non è suriettivo, ma $df(p) \neq 0$, riscriviamo la funzione in coordinate:

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m),\ i = 1, \dots, n.$$

Possiamo supporre a meno di cambiare gli indici (e quindi a meno di diffeomorfismi):

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \neq 0.$$

Il differenziale, $dg(p)$, dell'applicazione $g : W \to R^m$:

$$g(x_1, \dots, x_{m-1}, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

è invertibile. Per il teorema della funzione inversa esiste un intorno aperto $A \subset W$ tale che $g : A \to \mathbb{R}^m$ è un diffeomorfismo sull'immagine $B = g(A)$. Inoltre facciamo in modo che B sia un cilindro $U \times]a, b[$, con U aperto in $\mathbb{R}^{n-1}$. Vogliamo dimostrare $\mu(f(C \cap A)) = 0$.

Posto $h = f \cdot g^{-1} : B \to \mathbb{R}^n$ abbiamo che i valori critici di h e di f coincidono. Nelle coordinate $(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, t)$ posto $x = (x_1, \ldots, x_{m-1})$. abbiamo:

$$h(x,t) = (h_1((x,t), \ldots, h_{n-1}(x,t), t).$$

che riscriviamo come:

$$h = (h_t(x), t).$$

Per dimostrare che le immagini D_h dei punti critici C_h di h, $D_h = h(C_h)$, ha misura nulla basta considerare dei parallelepipedi (o cubi) 7 della forma $K \times [c,d]$, con K cubo di $\mathbb{R}^{m-1}$ e provare che

$$\mu(D_K) = 0,$$

dove abbiamo posto $D_K = h(C_h \cap (K \times [c,d])$.

Fissato $t \in [c,d]$ sia

$$C_t = C_h \cap (K \times \{t\}).$$

Per costruzione $(x,t) \in C_t$ se e solo se x è un punto di K punto critico per la funzione liscia $h_t : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ Ma allora

$$D_K = g(C_h \cap (K \times [c,d]) = \bigcup_{t \in [c.d]} D_t \times \{t\}$$

Per induzione $D_t = h_t(C_t)$ ha misura zero. Utilizzando il teorema di Fubini otteniamo

$$\mu_{\mathbb{R}^n}(D_K) = \int_c^d \mu_{\mathbb{R}^{n-1}}(D_t)dt = \int_c^d 0dt = 0.$$

Questo completa la nostra dimostrazione.

□

1.4 Fibrati Vettoriali e forme differenziali

1.4.1 Il fibrato cotangente

La costruzione del fibrato tangente T_M di una varietà M e le sue carte coordinate hanno permesso di estendere il concetto di differenziale di una funzione regolare e di chiarire alcune delle notazioni usate nel calcolo differenziale. In particolare si è interpretato il differenziale di una funzione $f \in C^k(M)$ come una applicazione $df : T_M \to \mathbb{R}$,

$$df(p) \in T^*_{M,p},$$

$T^*_{M,p}$, è lo spazio duale a $T_{M,p}$. Se definiamo

$$T^*_M = \bigcup_{p \in M} T^*_{M,p}$$

e $\pi : T^*_M \to M$ la proiezione naturale, df è una sezione di π. Ripetendo la costruzione delle carte coordinate dello spazio tangente possiamo definire una struttura di varietà differenziabile T^*_M : detto spazio o fibrato **co**tangente. Ripercorriamo brevemente la costruzione:

1) Se $\{U, \varphi\}$ $U \subset M$ è un aperto coordinato allora

$$T^*_U \equiv U \times \mathbb{R}^m.$$

Infatti se $\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_m(p))$ allora

$$dx_1, \ldots, dx_m.$$

una base definita in ogni punto $p \in U$. Abbiamo la carta: $(\varphi, d\varphi) : T^*_U \equiv \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \subset R^{2m}$.

2) Se $\{W, \varphi\}$ è una carta coordinata, $\varphi(W) = U$ abbiamo delle carte:

$$(D\varphi^{-1})^* : T^*_W \to T^*_U \equiv U \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}.$$

3) Il cambiamento di coordinate: se $\{Z, \psi\}$ è un'altra carta, il cambiamento di coordinate in T^* è dato da

$$(\psi\varphi^{-1}, {}^t(d(\varphi\psi^{-1})),$$

dove ${}^tA$ è la trasposta di una matrice A. In pratica i cambiamenti di carta si ottengono facilmente dalle regole del differenziale di una funzione se

$$\psi\varphi^{-1} = (y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_m))$$

allora:

$$dy_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j}{dx_i} dx_i. \tag{1.11}$$

Proposizione 1.4.1.1. *Con le carte definite sopra, il fibrato cotangente $T^*_{M,p}$ è una varietà di dimensione $2m$ e classe $\mathscr{C}^{k-1}$ e ($\mathscr{C}^\infty$ se $k = \infty$). Inoltre la fibrazione $\pi : T^*_{M,p} \to M$ è differenziabile di classe $\mathscr{C}^{k-1}$.*

Definizione 1.4.1.2. *Una sezione di $\pi : T^*_{M,p} \to M$ è una $1-$forma differenziale di M. Supponiamo M di classe $\mathscr{C}^\infty$, lo spazio delle $1-$forme su M sarà indicato con $\Lambda^1(M)$.*

Come per il tangente possiamo definire le sezioni del fibrato cotangente, queste sono dette $1 - forme$. Sia $\Lambda^1(U)$ lo spazio delle $1-$forme definite in un aperto $U \subset M$, cioé applicazioni lisce $\alpha : U \to T^*_M$ tali che $\alpha \circ \pi = id_U$ l'identità di U. Se U è un aperto, coordinato da $\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_m(p))$, possiamo scrivere ogni $1 - forma$, $\alpha \in \Lambda^1(U)$, come

$$\alpha = a_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)dx_n$$

dove le $a_1(x_1, \ldots, x_n)$ sono lisce. In particolare per ogni funzione liscia, $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ si ha $df \in \Lambda^1(M)$, Definiamo una mappa detta differenziale (esterno):

$$d : \mathscr{C}^\infty(M) \to \Lambda^1(M). \tag{1.12}$$

Abbiamo allora la seguente (nota) definizione

Definizione 1.4.1.3. *Una forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ si dice esatta se esiste una funzione $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, tale che $df = \alpha$.*

Uno dei vantaggi delle forme rispetto ai campi vettoriali è che hanno un buon comportamento rispetto alle funzioni lisce: se $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(M, N)$ allora abbiamo una applicazione

$$\varphi^* : \Lambda^1(N) \to \Lambda^1(M)$$

definita da

$$\varphi^*(\alpha)(v) = \alpha(D(\varphi)v)$$

con $v \in T_{M,p}$.

Esercizi 1.4.1.4.

Dimostrare che per ogni f, $d\varphi^*(f) = \varphi^*(df)$.

Dimostrare che M è connessa se e solo se le uniche funzioni per cui $df = 0$ sono le costanti.

Se $M = \mathbb{R}$ allora ogni 1-forma è esatta.

Trovare una 1 forma non esatta in S^n con $n \geq 1$.

1.4.2 Funzioni multilineari

Nella precedente sezione abbiamo definito le $1-$forme differenziabili come sezioni del fibrato cotangente. L' hessiano, nella formula di Taylor, le forme fondamentali, nella teoria delle superficie e la teoria elementare delle due forme differenziali in $\mathbb{R}^2$. mostrano come sia importante considerare funzioni bilineari definite sui tangenti. Più in generale se $p \in M$ sia

$$\varphi(v_1, \ldots, v_s) : T_p \times, \ldots, \times T_p \to \mathbb{R}$$

una funzione $s-$multilineare.

Indicheremo con $T_p^{*\otimes s}$ lo spazio delle $s-$funzioni multilineari definite su T_p. In particolare porremo anche $T_p^{*\otimes 2} = T_p^* \otimes T_p^*$, $T_p^{*\otimes 3} = T_p^* \otimes T_p^* \otimes T_p^*$ etc. . Il motivo di di questa notazione moltiplicativa viene dal fatto che se $L_1, \ldots, L_s$ sono elementi del duale del tangente, $L_i \in T_p^*$ allora il prodotto

$$L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_s(v_1, v_2, \ldots, v_s) = L_1(v_1) \cdot L_2(v_2) \cdot \ldots L_s(v_s) \tag{1.13}$$

definisce una funzione s multilineare. Non tutte le funzioni multilineari sono prodotto di funzione lineari. Tuttavia otteniamo un insieme di generatori: con le notazioni precedenti, se x_i sono coordinate di un intorno di p e $dx_1, \ldots, dx_m$ la base di (T_p^*), definiamo una base per $(T_p^*)^{\otimes s}$

$$\{dx_{i_1} \otimes \ldots \otimes dx_{i_s}\} \quad 1 \leq i_j \leq m. \tag{1.14}$$

Definizione 1.4.2.1.

Una funzione $\varphi \in T_p^{*\otimes s}$ si dice simmetrica se

$$\varphi(\ldots, v_i, \ldots v_j, \ldots) = \varphi(\ldots, v_j, \ldots v_i, \ldots) \;\; \forall i, \; j, \; , v_i, v_j \in T_p.$$

Il sottospazio di $T_p^{*\otimes s}$ *delle funzioni simmetriche verrà indicato con*

$$Sym^s(T_p^*).$$

Una funzione $\varphi \in T_p^{*\otimes s}$ *si dice alternate se*

$$\varphi(\dots, v_i, \dots v_j, \dots) = -\varphi(\dots, v_j, \dots v_i, \dots) \quad \forall i,\ j,\ v_i, v_j \in T_p.$$

Il sottospazio di $T_p^{*\otimes s}$ *delle funzioni alternati verrà indicato con*

$$\Lambda^s(T_p^*).$$

Esercizi 1.4.2.2.

Mostrare che $T_p^* \otimes T_p^* = Sym^2(T_p^*) \oplus \Lambda^2(T_p^*)$

Dimostrare che se $s \leq m$ $\dim \bigwedge^s(T_p^*) = \binom{m}{s}$, *e che* $\Lambda^s(T_p^*) = 0$ *per* $s > m$.

Calcolare $\dim Sym^s(T_p^*)$.

Interpretare i polinomi omogenei di grado d *in* m *variabili come funzioni multilineari simmetriche di* $\mathbb{R}^m$.

Come nel caso del tangente e del cotangente possiamo costruire dei fibrati :

1) $T_M^{*\otimes s} = \bigcup_{p\in M} T_p^{*\otimes s}$.
2) $Sym^s T_M^* = \bigcup_{p\in M} Sym^s(T_p^*)$
3) $\bigwedge^s T_M^* = \bigcup_{p\in M} \bigwedge^s(T_p^*)$.

Tutti i precedenti insiemi hanno una applicazione naturale su M, che chiameremo sempre π. La controimmagine di ogni punto sono le applicazioni multilineari (simmetriche /alternanti) definite sul tangente al punto. Le basi canoniche 1.14 danno una **trivializzazione** di $T_U^{\otimes s}$ quando U è un aperto coordinato

$$T_U^{\otimes s} \equiv U \times \mathbb{R}^{ms}.$$

Questo definisce allora una carta coordinata per $T_M^{*\otimes s}$. I cambiamenti di coordinate possono essere pesanti da scrivere, ma si ricavano tutti dalle regole di Leibnitz. La fibrazione $\pi : T_M^{*\otimes s} \to M$ ha classe $\mathscr{C}^{k-1}$.

Analogamente possiamo definire trivializzazioni locali per $Sym^s T_M^*$ e $\Lambda^s T_M^*$. Consideriamo il caso delle forme alternanti e lasciamo al lettore il caso delle funzioni simmetriche. La teoria del determinante suggerisce che data $L_1 \otimes L_2 \otimes \dots \otimes L_s$ come in 1.13 possiamo costruire una forma alternata $L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_s$.

$$L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_s(v_1, \dots, v_s) = det \begin{pmatrix} L_1(v_1) & L_1(v_2) & \dots & L_1(v_s) \\ L_2(v_1) & L_2(v_2) & \dots & L_2(v_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_s(v_1) & L_s(v_2) & \dots & L_s(v_s) \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Con queste notazioni una base di $\bigwedge^s T_U^*$ è data da

$$\{dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_1}\}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq m$$

Abbiamo

Proposizione 1.4.2.3. *Con le carte definite, i fibrati tensoriali:* $\bigotimes^s T_M^*$, $Sym^s T_M^*$ *e* $\bigwedge^s T_M^*$ *sono varietà* $\mathscr{C}^{k-1}$ *(* $\mathscr{C}^\infty$ *se* $k = \infty$*). Inoltre la fibrazione* $\pi : \bigwedge^s T_M^* \to M$ *è differenziabile di classe* $\mathscr{C}^{k-1}$.

Supponiamo per semplicità $k = \infty$ e diamo le seguenti:

Definizione 1.4.2.4. *1) Una* $s-$ *forma differenziale di* M *è una sezione di*

$$\pi : \bigwedge^s T_M^* \to M.$$

2) Indicheremo con $\Lambda^k(M)$ *lo spazio delle forme differenziali* $\mathscr{C}^\infty$ *di* M.

3) Una sezione liscia di g *di* $Sym^2 T^*(M)$ *è una metrica (Riemanniana) su* M *se per ogni* $p \in M$ $g(p)$, *è definita positiva.*

4) Una coppia $\{M, g\}$ *dove* g *è una metrica su* M *si dice varietà Riemanniana.*

1.4.3 Fibrati vettoriali

Vogliamo formalizzare gli esempi costruiti nelle precedente sezioni. Cominciamo con una definizione di fibrato. Intuitivamente il fibrato è un oggetto che localmente è un prodotto. Tutte le varietà e le funzioni considerate saranno di classe $\mathscr{C}^k$.

Definizione 1.4.3.1. *Siano* M *e* F *varietà, una fibrazione su* M *avente come fibra* F *è la collezione dei seguenti dati:*

1) Una varietà E

2) Una applicazione $\pi : E \to M$.

3) Un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$.

4) Dei diffeomorfismi $f_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ *tali che:*

$$p_1(f_i(y)) = \pi(y)$$

ove $p_1 : U_i \times F \to U_i$ *è la proiezione sulla prima componente* $p_1(x, f) = x$.

Si noti che nella precedente definizioni possiamo prendere gli U_i aperti coordinati. Spesso indicheremo un fibrato solo con la coppia $\{E, \pi\}$ o anche solo con E. Si osservi che $\pi^{-1}(x)$ è diffeomorfa attraverso la f_i alla fibra F. In particolare $\dim E = \dim M + \dim F$. Al variare di $x \in U_{i,j} = U_i \cap U_j$ abbiamo una famiglia $f_{i,j}(x) = f_i \cdot f_j^{-1}$ di diffeomorfismi di F,

$$f_{i,j} : U_{i,j} \times F \to U_{i,j} \times F$$

parametrizzata da $U_{i,j}$. Le $f_{i,j}$ si dicono **funzioni di transizione**. Si notino le condizioni *di cociclo*: $f_{i,j} f_{j,k} = f_{i,k}$ $f_{ii} = id$ e $f_{j,i} = f_{i,j}^{-1}$.

Possiamo definire le sezioni della fibrazione come le mappe regolari $s : M \to E$ tali che $\pi s = id_M$.

Definizione 1.4.3.2. *Un fibrato vettoriale (reale) di rango n $\{E, \pi\}$ su M è un fibrato dove la fibra F è lo spazio $\mathbb{R}^n$ e i diffeomorfismi $f_{ij}(x)$ sono lineari:*

$$f_{ij}(x) \in GL(n, \mathbb{R}) \quad \forall x \in U_{i,j}.$$

Abbiamo selezionato cioè le fibre e i diffeomorsfismi più semplici. Le f_i si dicono trivializzazioni del fibrato. Si noti che $f_{ij}(x) : U_{i,j} \to GL(n, \mathbb{R})$ è funzione $\mathscr{C}^k$. Inoltre se gli U_i sono coordinate da funzioni $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^m$, possiamo usare le composizioni $(\varphi, id) \cdot f_{i,j} : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^{n+m}$ per definire carte coordinate di E. Si noti che le fibre di ogni punto $E_x = \pi^{-1}(x)$ sono in modo naturale degli spazi vettoriali reali.

Esempio 1.4.3.3. *Fibrato banale, fibrato tangente cotangente e multilineari. Esempio di fibrato non vettoriale: il fibrato di Hopf.*

1.4.4 Costruzioni con i fibrati

Un fibrato vettoriale di rango n vuole essere (in un certo senso) uno spazio vettoriale di dimensione n aventi come base M, varietà differenziale di classe $\mathscr{C}^k$, ovvero le sue sezioni sono un modulo di rango n sulle funzioni $\mathscr{C}^k(M)$. Il principio generale è che le varie costruzioni dell'algebra lineare si possono definire per i fibrati. La prima operazione che descriviamo è invece di natura insiemistica e topologica.

Restrizione. Se $E \to M$ è un fibrato e N è una sottovarietà di M. La restrizione E_N di un fibrato ad una sottovarietà è in modo naturale un fibrato. Si noti che insiemisticamente se $E = \cup_{\{x \in M\}} E_x$ con aperti trivializzanti U allora $E_N = \cup_{\{x \in N\}} E_x$ con aperti trivializzanti $U \cap N$.

Prodotto. Se E e L sono due fibrati costruiamo dapprima $E \times L \to M \times M$. Questo è un fibrato vettoriale su $M \times M$ con aperti trivializzanti del tipo $U \times V$. Sia Δ la diagonale del prodotto. Identifichiamo M e Δ, $M \equiv \Delta$, cioé M con l'immagine dell'inclusione: $x \to (x, x)$. La restrizione $E \times F_{|\Delta}$ con aperti trivializzanti $U \times V \cap \Delta$, definisce un fibrato che chiameremo ancora $E \times F$, su M.

Omomorfismi. Vogliamo dare la definizione di omomorfismo (lineare) tra fibrati vettoriali. Supponiamo di avere due fibrati vettoriali $E, \pi_E, ,$ e L, π_L rispettivamente su M e N. Date due funzioni regolari $H : E \to L$ $h : M \to N$, che commutano con le proiezioni $h\pi_E = \pi_L H$, cioè un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & L \\ \pi_E \downarrow & & \pi_F \downarrow \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array} .$$

Si ha allora per ogni $x \in M$ la restrizione, H_x, di H alla fibra $E_x = \pi_E^{-1}(x)$ definisce un applicazione

$$H_x : E_x \to L_{h(x)}$$

dove con E_x e L_y denotiamo la fibre di E L rispettivamente su x e y :

Definizione 1.4.4.1. *Diremo che H è un omomorfismo di fibrati vettoriali se H_x è lineare per ogni $x \in M$. Quando H è un omomorfismo diremo che H è iniettivo, suriettivo se H_x lo è per ogni x. Diremo che H è un isomorfismo di fibrati se H è un diffeomorfismo lineare sulle fibre. (quindi H_x biettiva e h diffeomorfismo).*

Se una funzione $h : M \to N$ è funzione regolare allora $Dh : T_M \to T_N$ è un omomorfismo di fibrati. Relativamente semplici sono gli omomorfismi di fibrati $H : E \to F$ quando $M = N$ e $h : M \to M$ è la funzione identità. In questo caso possiamo trovare aperti coordinati U che trivializzano entrambi i fibrati. Allora, in tali coordinate, H_p si rappresenta come una matrice $A(x) = (a_{ij}(x))$ dove $x = x(p)$ sono le coordinate di $p \in U$ e le $a_{ij}(x)$ sono funzioni regolari. Si noti che $H_x(E_x)$ è un sottospazio vettoriale di L_x.

Esempio 1.4.4.2. *Se indichiamo con $\mathbb{R}$ il fibrato banale $\mathbb{R} \times M$ abbiamo che le due operazioni tipiche dei prodotti vettoriali: $m : E \times E \to E$, $m(v, w) = v+w$ e $k : \mathbb{R} \times E \to E$ sono omomorfismi di fibrati.*

Sottofibrati. Supponiamo $M = N$ e $h = id_M$. Notiamo che se H è iniettivo $H(E)$ allora è una sottovarietà di L. Diremo allora che $H(E) = G$ è un sottofibrato di L. Naturalmente E e G sono sottofibrati isomorfi. Un sottofibrato è allora una sottovarietà data dall'immagine iniettiva di un omomorfismo lineare H (con $h = id_M$).

Quoziente e Nucleo. Se $H(E) = G \subset L$ è un sottofibrato vogliamo costruire il quoziente $Q = L/G$. Come insieme dobbiamo avere: $Q_x = L_x/G_x$. Vogliamo definire gli aperti trivializzanti. Sia p un punto di M prendiamo un aperto U con $p \in U$, tale che U sia un aperto coordinato che trivializza E, G e L. Se i ranghi di E e di L sono rispettivamente m e n, ci riduciamo a considerare il caso $L = \mathbb{R}^n \times U$ e $E = \mathbb{R}^m \times U$ e H è la matrice $A(x) = (a_{ij})(x)$. Per ipotesi le colonne della matrice sono, per ogni x, indipendenti. Allora il determinante di uno dei minori di ordine n è non nullo in p. Supponiamo , cosa possibile a meno di una permutazione, che la sottomatrice

$$(a_{ij}(x(p))\ 1 \leq i, j \leq m$$

sia invertibile. Allora $W = \{x \in U : \det(a_{ij}(x)) \neq 0, 1 \leq i, j \leq m\}$ è un aperto che contiene p. Se $e_1, \ldots e_m$ è la base standard di $\mathbb{R}^m$ e $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ sono le colonne di $A(x)$ si ha che $v_1(x(q)), \ldots v_n(x(q)), e_{n+1}, \ldots, e_m$ è una base di $\mathbb{R}^m$ per ogni $q \in W$. Poiché le $v_i(x)$ generano l'immagine di H abbiamo un isomorfismo (per ogni x) $\mathbb{R}^{m-n} \to Q_x = L_x/G_x$

$$(a_1, \ldots, a_{m-n}) \to (0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_{m-n})\ modG_x.$$

Questo definisce una applicazione biettiva

$$W \times \mathbb{R}^{m-n} \to \cup_{x \in W} Q_x.$$

La regolarità delle $a_{ij}(x)$ prova che le funzioni di transizione sono regolari (tutte le operazioni sono algebriche compresa l'inversione di una matrice). Abbiamo definito allora una buona trivializzazione del quoziente nell' intorno ad ogni punto.

Si noti che una tivializzazione di un fibrato E su U di rango n equivale a definire un isomorfismo della restrizione E_U con il fibrato banale su U, cioè all'esistenza n sezioni regolari di E_U $s_1, \ldots, s_n$ tali che per ogni punto x di U

$$s_1(x), \ldots, s_n(x)$$

sia una base per E_x.

Le due costruzioni (sottofibrato/ quoziente) si potrebbero invertire, se è dato un omomorfismo lineare suriettivo tra fibrati $H : E \to L$ allora si prova (dualmente) che il nucleo è un sottofibrato di E.

Il fibrato normale. Se $X \subset M$ è una sottovarietà allora il differenziale dell'inclusione j definisce un omomorfismo $Dj : T_X \to T_M$, ma per costruzione abbiamo anche un omomorfismo iniettivo di fibrati su X :

$$Dj : T_X \to T_{M|X}$$

dove $T_{M|X}$ è la restrizione a X del tangente T_M di M ($T_{M|X} = \cup_{\{x \in X\}} T_{M,x}$). Il fibrato normale di X in M è allora il quoziente

$$N = T_{M|X}/T_X.$$

Il pull-back. Abbiamo una generalizzazione della restrizione di fibrati. Sia $f : X \to M$ una funzione regolare e $\{E, \pi\}$ è un fibrato vettoriale su M. Costruiamo un fibrato f^*E su X. Questo si definisce insiemisticamente $f^*E = \cup_{\{x \in X\}} E_{f(x)}$. Ovvero $f^*E = \{(v, x) \in X \times E : f(x) = \pi(v)\}$. Lasciamo al lettore verificare che f^*E è un fibrato vettoriale definito su X.

Se f è una inclusione di un sottovarietà allora $f^*E \equiv E_{|f(X)}$. In generale il differenziale Df induce un omomorfismo di fibrati su X , avente con identità come funzione $X \to X$, (che per non introdurre un nuovo simbolo) indichiamo ancora con Df :

$$Df : T_X \to f^*T_M.$$

Le sezioni del pullback permettono di generalizzare il concetto di campi vettoriali.

Definizione 1.4.4.3. *Una sezione di f^*T_M si dice un campo di vettori di M tangente lungo f.*

Un campo lungo f associa ad ogni punto di $x \in X$ un vettore $V(x) \in T_{M,f(x)}$, tale funzione deve essere regolare. Noi useremo quasi sempre tali campi solo per funzioni definite su curve $\dim X = 1$ o superficie $\dim X = 2$, e più precisamente il caso di intervalli : $X = (a, b)$ e di prodotti di intervalli: $X = (a, b) \times (c, d)$.

Esempio 1.4.4.4. *Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ (o un aperto coordinato). Sia (a, b) un intervallo reale aperto. 1) Se $f : (a, b) \to U$ è liscia i campi lungo f si possono descrivere*

$$V(t) = a_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1}|_{f(t)} + \ldots + a_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n}|_{f(t)} :$$

si tratta di una curva in T_M.
2) Se $f : U \times (a,b) \to U$ *è invece la proiezione su* U *allora un campo lungo* f *è del tipo*

$$V(x,t) = a_1(x_1,\dots,x_n,t)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1,\dots,x_n,t)\frac{\partial}{\partial x_n,}.$$

e rappresenta un operatore differenziale lineari del primo ordine variabile in tempo.

Esercizi 1.4.4.5. *Sia* $H : E \to L$ *un omomorfismo di fibrati su* M *(*$h = id_M$ *e* $H_x : E_x \to L_x$*). Indichiamo con* $K_x = kerH_x$ *e* $G_x = H(E_x)$. *Poniamo* $\dim(K_x) = s(x)$

1) *Se la dimensione* $s(x)$ *di* K_x *non dipende da* x*:* $s(x) = s$ *allora* $imH = \cup G_x$ *e* $\ker H = \cup K_x$ *sono sottofibrati rispettivamente di* L *ed* E.

2) *Costruire un esempio in cui* $s(x)$ *non sia costante.*

3) *Costruire il fibrato* $Hom(E,L) = \cup Hom(E_x, L_x)$

4) *Costruire il fibrato duale* $E^* = Hom(E, \mathbb{R})$.

5) *Dimostrare che* $(E^*)^*$ *è isomorfo ad* E.

6) *Costruire* $E^* \otimes L^* = \cup B_x$ *dove* B_x *sono le applicazioni bilineari* $E_x \times L_x \to \mathbb{R}$.

7) *Definire* $E \otimes L = (E^* \otimes L^*)^*$

8) *Dimostrare che* $Hom(E,L)$ *è isomorfo a* $L \otimes E^*$.

9) *Costruire* $Sym^s E$ *e* $\bigwedge^s E$.

1.5 Campi vettoriali e sottovarietà

1.5.1 Equazioni differenziali ordinarie

In questa sezione riportiamo gli enunciati dei classici risultati di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati, delle soluzioni di sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Sia W un aperto di $\mathbb{R}^m$, sia $J = (a, b)$, $a < 0 < b$, un intervallo reale contenente 0. Per ogni $0 < \delta$, poniamo $J_\delta = (-\delta, \delta)$ l'intervallo di centro 0 e raggio δ. Abbiamo $J_\delta \subset J$ se $\delta < max(|a|, b)$.

Sia $F : W \times J \to \mathbb{R}^m$

$$F(x_1, \dots, x_m, t) = (f_1(x_1, \dots, x_m, t), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m, t))$$

una funzione di classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 0$. Sia $J_\delta \subset J$, diremo che una funzione $y : J_\delta \to W$ soddisfa al problema di Cauchy per F con punto iniziale $y_0 \in W$ se è di classe $\mathscr{C}^1$ e per ogni $t \in J_\delta$

$$y_i'(t) = f_i(y_1(t), \dots, y_m(t), t), \qquad y(0) = y_0. \tag{1.16}$$

Una ipotesi che assicura esistenza e unicità è la condizione di Lipschitz per la funzione F, cioè l'esistenza una costante c tale

$$||F(x, t) - F(z, t)|| \leq c||x - z||$$

per ogni $x, z \in W$ e $t \in J$. Infatti abbiamo il seguente:

Teorema 1.5.1.1. *Se F soddisfa l'ipotesi di Lipschitz allora per ogni $y_0 \in W$ esiste un $\delta > 0$ e una sola funzione $y : J_\delta \to W \subset \mathbb{R}^m$*

$$y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$$

soluzione del problema di Cauchy (1.16) . Inoltre $y(t)$ è di classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

Vogliamo discutere il risultato sulla dipendenza continua dai dati. Cominceremo con il caso di un dominio compatto, premettiamo la seguente:

Definizione 1.5.1.2. *Siano U e W due sottospazi di uno spazio topologico X. Diremo che U è relativamente compatto in W, e scriveremo $U \subset\subset W$, se la chiusura di U è compatta e contenuta in W : $\overline{U} \subset W$ è compatto.*

Per esempio se $(-1, 1)^m \subset\subset W \subset \mathbb{R}^m$, se e solo se se $[-1, 1]^m \subset W$. Con le notazioni di 1.5.1.1 abbiamo il seguente:

Theorem 1.5.1.3. *Sia F una funzione di classe $\mathscr{C}^k$, $F : W \times J \to \mathbb{R}^m$,*

$$F \in \mathscr{C}^k(W \times J, \mathbb{R}^m)$$

che soddisfa la condizione di Lipschitz. Sia $U \subset\subset W$ un aperto di R^m relativamente compatto in W. Allora esiste un intervallo reale $I = (-\delta, +\delta)$ ($\delta > 0$) e una sola funzione $G : U \times I \to W$

$$G(y_1, \dots, y_m, t) = (g_1(y_1, \dots, y_m, t), \dots, g_m(y_1, \dots, y_m, t)),$$

tale che per ogni $y \in U$ $G(y, 0) = y$ e $G(y, t) = y(t)$ soddisfa al problema di Cauchy 1.16 per la F. La funzione G è di classe $\mathscr{C}^k$ nelle variabili x e $\mathscr{C}^{k+1}$ nella variabile t.

Definizione 1.5.1.4. *La funzione G del precedente teorema 1.5.1.3 si dice il flusso di F.*

Si noti che il flusso soddisfa $G(x,0) = x$ per ogni x in U. Inoltre $G_s : U \to W$ è iniettiva ($s \leq \delta$) per l'unicità della soluzioni delle equazioni differenziali. Più precisamente se definiamo $\tilde{F}(x,t) = F(x, s-t) : W \times (a-s, b-s) \to W$. Le soluzioni del problema di Cauchy per la $\tilde{F}$ sono le funzioni $y(-t+s)$. Allora il flusso di $\tilde{F}$ definisce l'inversa G'_s. Si noti infine $G_(x,t)$ definisce allora una omotopia tra G_0 l'inclusione di U in W e G_s.

Un caso particolarmente importante è quando la funzione F non dipende dal tempo. Allora ancora per l'unicità delle soluzione il flusso ha la cosidetta proprietà del semigruppo.

Proposizione 1.5.1.5. *Siano $U \subset\subset W$ due aperti di $\mathbb{R}^m$. Sia $F : W \to \mathbb{R}^m$ avente la proprietà di Lipschitz. Sia $G : U \times (-\delta, \delta) \to W$ il flusso di F. Siano $s_1, s_2 \in (-\delta, \delta)$ tali che $s_1 + s_2 \in (-\delta, \delta)$. Allora per ogni $x \in U$ tale che $G(x, s_1) \in U$ si ha:*

$$G(s_1 + s_2, x) = G(s_2, G(x, s_1))$$

1.5.2 Flusso di un campo vettoriale

Vi è una versione naturale del teorema delle equazioni ordinarie per varietà. Per questo si consideri un campo vettoriale X definito su una varietà M. Premettiamo la seguente:

Definizione 1.5.2.1. *Sia $J = (a,b)$ un intervallo reale contenente lo zero. Una curva $\gamma : J \to M$ è una curva integrale del campo X se per ogni $t \in (a,b)$:*

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = X(\gamma(t)).$$

In coordinate, le curve integrali di un campo vettoriale, sono soluzione di un sistema autonomo di equazioni differenziali. Infatti, sia (W, φ) un aperto coordinato, abbiamo

$$d\varphi(X) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x_1, \ldots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

e la curva $\gamma(t)$:

$$\varphi(\gamma(t)) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)).$$

La curva $\varphi(\gamma(t))$ è integrale per $d\varphi(X)$, questo significa:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_i(x_1, \ldots, x_m).$$

La condizione iniziale è allora $\varphi(\gamma(0)) = (x_1(0), \ldots, x_m(0)) = (x_1, \ldots, x_m)$.

Più in generale possiamo considerare dei campi $X(t)$ dipendenti da t, questi sono stati considerati nel secondo esempio di 1.4.4.4. La seguente è una definizione più tranquilla.

Definizione 1.5.2.2. *Sia M una varietà di classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$, e J un intervallo aperto reale. Un campo vettoriale variabile di classe $k-1$ è un' applicazione*

$$X : M \times J \to T_M$$

di classe $k-1$ tale che per ogni $\bar{t} \in J$

$$X(x, \bar{t})$$

è un campo vettoriale di M. Una curva $\gamma(t)$ è integrale di $X(x,t)$ se

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = X(\gamma(t), t).$$

Proposizione 1.5.2.3. *Sia M una varietà $\mathscr{C}^k$, $k > 1$, J un intervallo aperto reale che contiene lo zero e $X(x,t) : M \times J \to T_M$ un campo vettoriale variabile su M di classe $\mathscr{C}^{k-1}$. Allora esiste un intorno aperto $\mathcal{W} \subset M \times J$ di $M \times \{0\}$ e una funzione $G : \mathcal{W} \to M$ detta flusso, tale che per ogni $\overline{x} \in M$ la curva $\gamma(t) = G(\overline{x}, t)$ sia integrale per X e tale che $\gamma(0) = \overline{x} : G(x, 0) = x$ Inoltre G è di classe $\mathscr{C}^{k-1}$ e fissato $p \in M$ tale che $(x, \bar{t}) \in \mathcal{W}$, la funzione $f(t) = G(p,t)$ è di classe $\mathscr{C}^k$ in un intorno di $\bar{t}$.*

Dimostrazione. Fissato $p \in M$, si consideri un aperto coordinato (A_p, ψ), assumiamo $\psi(p) = 0$. In tali coordinate rappresentiamo il campo X :

$$X(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{m} b_i(x_1, \ldots, x_m, t) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Consideriamo la funzione $\Phi : A_p \times J \to \mathbb{R}^m$

$$\Phi(x,t) = (b_1(x,t), \ldots, b_m(x,t)).$$

Poniamo prendiamo un $r > 0$ tale il disco $D_r = \{x \in \mathbb{R}^n ||x|| < 1\}$ di raggio r sia relativamente compatto in $\psi(A_p)$, e poniamo $W_p = \psi^{-1}(D_r) : W_p \subset\subset A_p$. Allora utilizzando il teorema 1.5.1.3 per W_p possiamo trovare un reale $\delta_p > 0$ e definire il flusso di F

$$G_F : D_r \times (-\delta_p, \delta_p) \to \mathbb{R}^m$$

per la funzione F. Allora definiamo il flusso G_p per il campo X componendo con la mappa coordinata:

$$G_p(q,t) = \varphi^{-1}(G_F(\varphi(q,t))).$$

Abbiamo $G_p : \mathcal{W}_p \to M$, $\mathcal{W}_p = W_p \times (-\delta_p, \delta_p)$ equazioni differenziali abbiamo che $G_p = G_q$ in $\mathcal{W}_p \cap \mathcal{W}_q$. Definiamo allora

$$\mathcal{W} = \bigcup_{p \in M} U_p \times (-\delta_p, \delta_p).$$

La funzione G è definita dall'incollamento delle G_p, questa è ben definita: l'unicità del teorema delle equazioni ordinarie ci dice che la curva integrale ad un campo è unica. La regolarità della G segue dal risultato locale. $\square$

Un altro modo di dire che fissato x, $\gamma(t) = G(x,t)$ è curva integrale del campo è quello di affermare che la curva $(\gamma(t), t) \in \mathcal{W}$ rappresenta $X(t)$. Inoltre $G(x, 0) = x$. Possiamo allora riscrevere l'equazione differenziale utilizzando il differenziale della G.

Corollario 1.5.2.4. *Sia $G(x,t)$ il flusso di $X(t)$ allora abbiamo*

1) $DG_{x,0}(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}$

2) $DG_{x,t}(\frac{\partial}{\partial t}) = X(x,t)$.

Nota 1.5.2.5. *La parte non locale del discorso consiste solamente nell'incollamento delle varie soluzioni trovate nelle carte coordinate.*

Il precedente teorema implica che esiste un aperto $\mathcal{W}$ massimale in cui possiamo definire il flusso, per questo basta prendere l'unione degli aperti in cui il flusso è definito. Il seguente corollario generalizza 1.5.2.6:

Theorem 1.5.2.6. *Sia U un aperto di M*

$$U \subset\subset M.$$

Sia $X : M \times J \to T_M$ un campo vettoriale, allora esiste un numero un reale ($\delta > 0$) tale che la funzione di flusso è definita $G : U \times (-\delta, +\delta) \to M$.

Dimostrazione. Si ricopra U con un numero finito di $\mathcal{W}_p$ definiti nella dimostrazione precedente e si prenda il $\delta = \min \delta_p$. □

1.5.3 Campi vettoriali e sistemi autonomi

La soluzione dei sistemi autonomi equivale alla ricerca di curve integrali di campi vettoriali su una varietà. Ora supporremo la nostra varietà liscia e $X \in \mathcal{X}(M)$ un campo $\mathscr{C}^\infty$ su M. Le curve integrali e il flusso G_X di X sono di classe $\mathscr{C}^\infty$. Possiamo riscrivere la proprietà di semigruppo 1.5.1.5.

Proposizione 1.5.3.1. *Sia M una varietà $\mathscr{C}^\infty$ e $X \in \mathcal{X}(M)$ un campo liscio. Sia $M \times 0 \subset \mathcal{W}$ l'aperto di $M \times \mathbb{R}$ massimale per il flusso $G = G_X : \mathcal{W} \to M$. Siano $p \in M$ e $T > 0$ tali che $(p,t) \in \mathcal{W}$ per $t \in [0,T]$. Supponiamo $0 \leq s_1$ e $0 \leq s_2$ tali che $s_1 + s_2 \leq T$. Posto allora $q = G(p, s_1)$ si ha allora $(q, s_2) \in \mathcal{W}$ e*

$$G(p, s_1 + s_2) = G(q, s_2) = G(G(p, s_1), s_2).$$

Analogo risultato vale per s_1 e s_2 negativi.

Dimostrazione. L'intervallo $[-T,T]$ è compatto, sia $(p,t) \in \mathcal{W}$ per $t \in [-T,T]$. Allora esiste un intorno aperto $U \subset M$ di p tale che $U \times [-T,T]$. Per ogni $s \in [0,T]$ la restrizione $G_s : U \to M$:

$$G_s(x) = G(x,t)$$

è un diffeomorfismo locale. L'inversa di G_s è infatti G_{-s}. Posto $W = G_s(U)$, per ogni $y \in W$ si ha $y = G(x,s)$ con $x \in U$. Le curve $H(y,t) = G(x,(t-s))$ sono integrali e $H(y,0) = y$ allora H è un flusso per X. per l'unicità delle soluzioni abbiamo

$$H(y,t) = G(y,t) = G(G(x,s),(t-s)) \tag{1.17}$$

per $y \in W$ e $\rho < 0 \leq t \leq T - s$. Allora $G(p,,s),t) \in \mathcal{W}$ per ogni $0 \geq t \geq T - s$. La legge del semigruppo si ottiene ponendo in 1.17 per $s = s_1$ e $s_2 = t - s$. □

Il comportamento globale delle soluzioni di un sistema differenziale può essere intrattabile. Abbiamo comunque il seguente risultato di prolungamento

Proposizione 1.5.3.2. *Siano X un campo definito su M, a (a,b) un intervallo tale che $a < 0 < b$. $\gamma : (a,b) \to M$ e una curva integrale di X. Se $\gamma(a,b) \subset\subset M$; allora esistono $c < a$ e $d > b$ e una curva integrale $\overline{\gamma} : (c,d) \to M$ tale che $\gamma(t) = \overline{\gamma}(t)$ per ogni $t \in (a,b)$.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che la curva integrale si prolunga. Lo dimostreremo in b. Posto $S = \gamma(a,b)$ e $\gamma(0) = p$ sia U un intorno aperto di $\overline{S}$ tale che $U \subset\subset M$. L'esistenza di U si prova ricoprendo $\overline{S}$ con un numero finito di intorni relativamente compatti in M. Sia $\delta > 0$ un numero reale per cui esista $G : U \times (-\delta,\delta) \to M$ e sia $T \in (a,b)$ tale che $b - \delta < T < b$, poniamo $\gamma(T) = q$. Ora $G(q,t)$ è definito per $t \in (-\delta,\delta)$ Se poniamo $d = b - T + \delta$

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(t) \quad t \in (a,b) \qquad\qquad \overline{\gamma}(t) = G(q, t - T) \quad t \in (T,d)$$

abbiamo il prolungamento voluto. □

Si noti che se $X_p = 0$ allora $G(p,t) = x$ per ogni t, dove G è definita. Definiamo il supporto di un campo X come la chiusura dell'aperto di M in cui $X_p \neq 0$.

Corollario 1.5.3.3. *Se X è a supporto compatto (per esempio se M è compatta) allora $\mathcal{W} = M \times \mathbb{R}$ e per ogni s_1 e s_2 in $\mathbb{R}$*

$$G(p, s_1 + s_2) = G(G(p, s_1), s_2).$$

Si noti che $s \in G_s$ definisce un omomorfismo di gruppo tra $\mathbb{R}$ e i diffeomorfismi di M

$$\mathbb{R} \to \mathrm{diff}(M,M).$$

Quando X ha supporto compatto si ha allora una applicazione

$$\rho : \mathcal{X}(M) \to Hom(\mathbb{R}, \mathrm{diff}(M,M)).$$

per costruzione tali diffeomorfismi sono omotopi all'identità. Ci sono altri casi molto importanti di prolungamento, per esempio nel caso dei campi invarianti di un gruppo di Lie. Per ulteriori dettagli sulle equazioni differenziali ordinarie si suggerisce la lettura del libro di Hurewicz [4].

1.5.4 Il Teorema di Frobenius

In questa sezione tratteremo il legame tra varietà, campi vettoriali e le coordinate. Non è difficile generalizzare il concetto curva integrale a quello di sottovarietà integrale. Sia M una varietà liscia e $D = \{X_1, \ldots, X_k\}$ campi vettoriali lisci su M. Sia D_p il sottospazio di $T_{M,p}$ generato dai $\{(X_1(p), \ldots, X_k(p)\}$. Una sottovarietà N di dimensione si dice integrale di D se per ogni $p \in N$ il tangente $T_{N,p}$ è proprio D_p. Si noti che se N è integrale per D allora le restrizioni $Y_i = X_{i|N}$ sono campi vettoriali di N allora i bracket $[Y_i, Y_j]$ sono campi vettoriali su N. ne segue che per ogni $p \in N$

$$[X_i, X_j](p) \in D_p.$$

Questa condizione è allora necessaria per l'esistenza di sottovarietà integrali. Il teorema di Frobenius dice che la condizione più forte

$$[X_i, X_j](p) \in D_p \ \forall p \in M$$

è sufficiente all'esistenza locale di sottovarietà integrali. Tradizionalmente il dato di $D_p \subset T_{p,M}$ che varia con regolarità al variare di p si chiama *distribuzione.*

Definizione 1.5.4.1. *Una distribuzione D (di Frobenius) di rango k è un sottofibrato di rango k di T_M. Un campo vettoriale $X \in \mathcal{X}(M)$ appartiene alla distribuzione D se per ogni $p \in M$, $X(p) \in D_p$. In altre parole X è una sezione di D.*

Si noti che un campo vettoriale definisce una distribuzione di rango 1 nell'aperto in cui non è nullo. In generale $k-$campi vettoriali $\{X_1, \ldots, X_k\}$ definiscono una distribuzione di rango k sull'aperto in cui $\{X_1(p), \ldots, X_k(p)\}$ sono indipendenti.

Definizione 1.5.4.2. *Una distribuzione D si dice involutiva se per ogni X e Y che appartengono a D allora $[X, Y]$ appartiene a D. Una distribuzione si dice (localmente) integrabile o fogliazione se per ogni punto $p \in M$ esista un intorno aperto W di p e una sottovarietà integrale F di D_W con F passante per p. Le sottovarietà integrali di una fogliazione sono dette foglie di D.*

Il teorema di Frobenius mostra come i concetti di fogliazione e distribuzione integrabile siano equivalenti.

Theorem 1.5.4.3. di Frobenius *Sia M una varietà liscia di dimensione m. Condizione necessaria e sufficiente affinchè una distribuzione sia integrabile è che sia involutiva.*

Dimostreremo più precisamente la seguente:

Proposizione 1.5.4.4. *Nelle ipotesi precedenti esiste un aperto coordinato $\{V, \varphi\}$ di M $\varphi : V \to \mathbb{R}^m$, tale che per ogni $q \in V$, $d\varphi(D_q)$ è lo spazio generato da $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $i \leq k$. Se indichiamo con $g = \pi\varphi : V \to \mathbb{R}^{m-k}$ la composizione*

$$\pi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{m-k}) = (y_1, \ldots, y_{m-k}),$$

allora $D_V = \ker dg$ e le sue foglie sono le sottovarietà della forma $g^{-1}(y)$, $y \in \mathbb{R}^{m-k}$. In particolare per ogni $p \in V$ esiste un unica foglia connessa, F, di D passante per p.

Dimostrazione. Il problema è locale quindi possiamo supporre che $M = A$ un aperto di $\mathbb{R}^m$, e $p = (0, \ldots, 0) \in A$. Inoltre possiamo supporre che esistano, k campi tali che D_p è generato da $\{X_1(p), \ldots, X_k(p)\}$. Scriviamo $X_i = \sum_j a_{j,i}(x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial}{\partial x_i}$. La matrice $A(x) = (a_{i,j}(x))$ ha rango k per ogni x in A. Esiste allora un intorno U, $0 \in U \subset A$ tale che il determinante di un minore di $A(x)$ sia non nullo. A meno di cambiare coordinate possiamo supporre :

$$\det A(x) = \det(a_{ij}(x(p))) \neq 0 \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

Allora esiste anche l'inversa $B(x) = (A(x))^{-1}$. I campi vettoriali $Y_j = B(x)X_j$ appartengono a D infatti se $B = (b_{j,r}(x))$

$$Y_j = \sum b_{j,r} X_r.$$

Per costruzione abbiamo

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{s>k} c_{j,s} \frac{\partial}{\partial x_s} = \frac{\partial}{\partial x_j} + Z_j.$$

Sia E la distrubuzione generata da $\frac{\partial}{\partial x_r}$ $r > k$. La E è involutiva e complementare alla D. I campi Z_j appartengono ad E,

$$[Y_j, Y_w] = [\frac{\partial}{\partial x_j}, Z_i] + [Z_i, \frac{\partial}{\partial x_j}] + [Z_i, Z_j].$$

Ognuno dei termini appartiene a E, ma per ipotesi $[Y_j, Y_w](p) \in D_p$ quindi

$$[Y_j, Y_w] = 0.$$

Siamo riusciti quindi a trovare una base per la distribuzione involutiva D avente operazioni di Lie banali.

Cominciamo a considerare il caso speciale in cui $Z_j = 0$ per $j > 1$. In questo caso $Y_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, e

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{s>k} c_{1,s} \frac{\partial}{\partial x_s}.$$

La condizione $[Y_j, Y_1] = 0$ equivale alla condizione

$$\frac{\partial c_{1,s}}{\partial x_j} = 0,$$

per $1 < j \leq k$.

Lemma 14. *La proposizione 1.5.4.4 vale per la distribuzione*

$$D' = \{\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{s>k} c_{1,s} \frac{\partial}{\partial x_r}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\}$$

se le funzioni $c_{1,s}$ non dipendono dalle variabili $x_2, \dots, x_k$.

Dimostrazione. Sia $G : \mathcal{W} \to V$ il flusso associato ad Y_1. Possiamo trovare allora un intorno $U \subset V$, di $p = (0, \dots 0)$ un numero reale $T \in (0, +\infty)$ tale che $\mathcal{W} \supset U \times (-T, T)$. Restringendo ancora U se necessario, possiamo supporre che sia della forma $U = J \times B \times C$, con J intervallo di $\mathbb{R}$, B e C aperti rispettivamente di di $\mathbb{R}^{k-1}$ e $\mathbb{R}^{m-k}$. Se $q \in U \subset \mathbb{R}^m$ scriviamo $q = (x_1, x, y)$ $x = (x_2 \dots, x_k)$ $y = (y_1 \dots, y_{m-k})$. Posto

$$G(x_1, x, y, t) = (x_1(t), x(t), y(t))$$

abbiamo $x(t) = x(0) = x$ (l'equazione differenziale non dipende da x e così la soluzione). Consideriamo la mappa $F(-T, T) \times B \times C \to V$:

$$F(t, x, y) = G(0, x, y, t) = (x_1(t), x, y(t))$$

Utilizzando 1.5.2.4 abbiamo per $i > 1$

$$DF_{x,0}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad DF_{x,t}\frac{\partial}{\partial t} = Y_1.$$

Allora $F(0) = 0$ e $dF(0)$ è invertibile nell'origine. Allora F è un diffeomorfismo locale. Restringendo opportunamente U, F è allora un diffeomorfismo sull'immagine $0 \in W \subset U$. Per costruzione l'inversa φ della F ha le proprietà volute.

□

Ora torniamo al caso generale, la distribuzione definita con i campi

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{s>k} c_{j,s} \frac{\partial}{\partial x_s} = \frac{\partial}{\partial x_j} + Z_j$$

$$[Y_j, Y_i] = 0.$$

Procediamo per induzione sul rango k della distribuzione. Si noti che primo passo di induzione è dimostrato dal lemma precedente. Quindi possiamo supporre vero la proposizione per rango $k-1$. In particolare $\{Y_2, \ldots, Y_k\}$ è involutiva. Utilizzando la mappa φ_{k-1} fornita dall'induzione come un cambiamento di coordinato abbiamo una distribuzione generata da

$$W_1 = \{d\varphi(Y_1), \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}\}.$$

Dopo aver rinormalizzato W_1 (mediante un eventuale cambio di coordinato) abbiamo una distribuzione trattata nel lemma. Riapplicando il lemma concludiamo la dimostrazione. □

La funzione φ appare costruita dalla composizione dei vari flussi, si potrebbe vedere infatti che la commutazione di tali flussi equivale alla condizione che la parentesi di Lie sia nulla.

Un caso importante è quello di una base Y_i, $i = 1, \ldots, m$, dei campi vettoriali tali che $[Y_i, Y_j] = 0$. Il teorema di Frobenius ci dice che localmente le Y_i sono dei campi associati a coordinate. Questo si può ottenere più direttamente introducendo una base duale di forme. Costruiamo ora delle $1-$ forme ω_j, $i = 1, \ldots k$, tali che per ogni p

$$\omega_j(Y_j) = 1 \ ; \quad \omega_j(Y_i) = 0 \ \ i \neq j.$$

Abbiamo

Lemma 15. *Le forme ω_j sono chiuse.*

Dimostrazione. Si ha $d\omega_j(Y_r, Y_s) = 0$. Infatti $Y_r(\omega_j(Y_s)) = 0$dato che $\omega_j(Y_s)$ è costante e $\omega_j[Y_r, Y_s] = \omega(0) = 0$. □

Se restringiamo l'aperto U in modo che sia senza omologia abbiamo che le nostre forme sono esatte $\omega_j = df_j$. Per costruzione $F = (f_1, \ldots f_m)$ è un diffeomorfismo locale. L'esistenza dell'inversa della F prova il seguente.

Proposizione 1.5.4.5. *Condizione necessaria e sufficiente che m campi puntualmente indipendenti definiscano un insieme di coordinate è che le loro parentesi di Lie siano nulle*

La precedente proposizione sposta, in un cero senso, l'attenzione dalle coordinate ai campi vettoriali. Questo rende possibile trattare la geometria di alcune strutture (spesso motivate dalla fisica teorica) in cui non sia possibile definire introdurre sistemi espliciti di coordinate.

1.6 Connessioni lineari

Prima di incominciare lo studio delle metriche introdurremo le connessioni lineari, che permettono di estendere il calcolo differenziale ai campi vettoriali.

1.6.1 Derivazioni di campi vettoriali

Nelle precedenti sezioni abbiamo studiato le equazioni differenziali ordinarie su varietà mediante l'integrazione di campi vettoriali. Tuttavia anche un concetto elementare come la linearità di una equazione differenziale non ha un immediato corrispondente sulle varietà. Uno dei problemi principali è che non è definita una derivazione dei campi vettoriali. Gli oggetti che compiono tale operazione sono le connessioni lineari. Le varietà sono supposte lisce ($\mathscr{C}^\infty$) così come le funzioni, i campi vettoriali etc. . Sia M una varietà, $p \in M$ e T_p il tangente di M a p. Indichiamo con $\mathscr{C}^\infty(M)_p$ i germi in p delle funzioni lisce, con $\mathcal{X}(M)_p$ lo spazio dei campi di M definiti in un intorno di p. Una derivazione di campi in p è una operatore $\nabla : T_p \times \mathcal{X}(M)_p \to T_p$, indicato con

$$\nabla(V, X) = \nabla_V X,$$

che sia lineare rispetto a entrambi gli argomenti e che in più soddisfi la regola di Leibnitz rispetto al secondo. Una connessione lineare è allora una derivazione di campi regolare.

Definizione 1.6.1.1. *Una connessione lineare su M è il dato $\forall p \in M$, $V \in T_{M,p}$ e $X \in \mathcal{X}(M)$ di*

$$\nabla_V X \in T_{M,p}$$

in modo tale che

1. $\nabla_{aV+bW} X = a\nabla_V X + b\nabla_W X$
2. $\nabla_V(X + Y) = \nabla_V X + \nabla_V Y$
3. $\nabla_V(f \cdot X) = f \cdot \nabla_V X + V(f)X \qquad f \in \mathscr{C}^\infty(M)_p$.
4. *Se X e Y sono campi lisci allora $\nabla_X Y$ è liscio.*

La connessione si identifica allora con la mappa $\nabla : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, Tuttavia rispetto alla prima variabile solo il valore puntuale del campo è rilevante. Si può infatti definire

$$\nabla : T_M \times \mathcal{X}(M) \to T_M.$$

Esempio 1.6.1.2. *Su un aperto A di $\mathbb{R}^m$, fissati $1 \leq i, j, k \leq m$ e m^3 funzioni lisce $\Gamma^k_{i,j}$ definite su A. Poniamo*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1.18}$$

Definiamo poi

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f \frac{\partial}{\partial x_j} = f(x) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

e per linearità costruiamo la connessione generale su A. Le funzioni $\Gamma^k_{i,j}$, sono le coordinate della connessione e sono detti simboli di Christoffel. Quando

$$\Gamma^k_{i,j} = 0$$

abbiamo la connessione standard di $\mathbb{R}^m$. La connessione covariante su una superficie in $\mathbb{R}^3$ è ottenuta per proiezione dalla connessione standard di $\mathbb{R}^3$.

In coordinate locali ogni connessione è data dai suoi simboli di Christoffel $\Gamma^k_{i,j}$. Più in generale siano $\{X_i, \dots, X_n\}$ dei campi che generano il tangente su un aperto $A \subset M$. La restrizione di ∇ ad A è nota quando conosciamo le funzioni $b^k_{i,j}$ (dette anche costanti di struttura) tali che

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{m} b^k_{i,j} X_k.$$

Esercizi 1.6.1.3.

Dire se la somma e la differenza di connessioni sono connessioni.

Dire se la combinazione convessa di due connessioni è una connessione.

Scrivere i simboli di Christoffel della connessione standard del piano rispetto a coordinate polari.

Dire se il prodotto di una funzione per una connessione è connessione.

Dire se l'operazione parentesi di Lie definiscono una connessione.

Si descrivano esplicitamente le connessioni su S^2.

1.6.2 Connessioni e campi tangenti

Data una connessione ∇ su M è utile estendere la sua azione ad oggetti un po' più generali dei campi vettoriali su M. Sia N una varietà liscia di dimensione n ed $f : N \to M$ una applicazione $\mathscr{C}^\infty$. Sia π la proiezione naturale $\pi : T_M \to M$. Ricordiamo che un campo di vettori di M definito lungo f è una applicazione liscia $X : N \to T_M$ tale che $f = \pi \cdot X$. Un campo tangente lungo f assegna ad ogni punto di N un vettore dello spazio tangente di M nel punto $f(p)$. Indichiamo con $\mathcal{X}_f(M)$ lo spazio dei campi tangenti lungo f. Si noti che un campo Y di M definisce in modo naturale un campo di M lungo f (che continuiamo a indicare con lo stesso simbolo), mediante la regola $Y(p) = Y(f(p))$. Si ha allora una applicazione naturale

$$\rho : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}_f(M).$$

Esercizi 1.6.2.1.

Dimostrare che ρ è iniettiva se e solo se $f(N)$ è denso in M

Dimostrare che ρ è suriettiva se e solo se f è diffeomorfismo.

Sia X un campo tangente lungo f e $v \in T_{p,N}$. Vogliamo definire

$$\overline{\nabla}_v X \in T_{f(p),M}.$$

Procediamo euristicamente. Vogliamo le regole minime della Definizione 1.6.1.1 e un buon comportamento rispetto ai differenziali di funzioni lisce. In particolare, oltre alle ovvie richieste di linearità, se $a : N \to \mathbb{R}$ è una funzione vorremo:

$$\overline{\nabla}_v aX = a\overline{\nabla}_v(X) + v(a)X_{f(p)}. \tag{1.19}$$

Se poi $X = \rho(Y)$ viene da un campo globale su M e $w = df(v) = Df_p(v) \in T_{f(p),M}$ vogliamo:

$$\overline{\nabla}_v X = \nabla_{df(v)}Y = \nabla_w Y \tag{1.20}$$

Localizziamo il problema. Per questo prendiamo aperti coordinati (U, φ) di p e (W, ψ), di $f(p)$ tali che $f(U) \subset W$ e poniamo $d\varphi(v) = v'$ e $d\psi(w) = w'$. Si noti che $X' := d\psi(X \circ \varphi^{-1})$ è un campo tangente a $g = \psi f \varphi^{-1}$. La connessione ∇ diventa allora una connessione ∇' su $W' = \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$. Se possiamo definire

$$Z = \nabla'_{v'}X'$$

porremo poi $\nabla_v X = d\psi^{-1}Z$. Posto $U' = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ scriviamo la f in coordinate:

$$g = g(y) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

Allora

$$X' = \sum_i^m a_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Volendo avere la linearità di 1.6.1.1 si può definire

$$\nabla'_{v'}X' = \sum_i^m \nabla'_{v'}a_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Le a_i sono funzioni su U', dunque possiamo usare (1.19) e porre

$$\nabla'_{v'}a_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i} = a_i(x)\nabla'_{v'}\frac{\partial}{\partial y_i} + v'(a_i)\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Infine $\frac{\partial}{\partial y_i}$ è un campo globale su U' usando 1.20

$$\nabla'_{v'}\frac{\partial}{\partial y_i} = \nabla_{w'}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

In conclusione:

$$\nabla'_{v'}X' = \sum a_i(x)\nabla_{dg(v)}\frac{\partial}{\partial y_i} + \sum v'(a_i)\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Abbiamo allora anche una derivazione, che indicheremo ancora con ∇.

$$\nabla : \mathcal{X}(N) \times \mathcal{X}_f(M) \to \mathcal{X}_f(M) \tag{1.21}$$

che ha le proprietà formali della connessione.

L'utilità di questa estensione diventa chiara nel caso di curve (parametrizzate). Sia $N = J$ un intervallo di $\mathbb{R}$, $\gamma : J \to M$. Possiamo derivare i campi che sono definiti lungo γ e non solo per campi su M. Sia

$$\frac{d}{dt}$$

il generatore dello spazio tangente all'intervallo. Se $X \in \mathcal{X}_\gamma$ abbiamo:

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} X \in \mathcal{X}_\gamma \tag{1.22}$$

In coordinate se $X = \sum_i^m x_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\gamma(t) = (a_1(t), \dots, a_m(t))$

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} X = \sum_k \left[\frac{dx_k(t)}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j}(\gamma(t)) \dot{a}_i(t) x_j(t) \right] \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1.23}$$

Esercizi 1.6.2.2.

Si descrivano i campi tangenti all'applicazione $f : \mathbb{R} \to S^1$ $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Sia $X = \frac{d}{d\theta}$ il campo vettoriale generatore del tangente alla circonferenza unitaria, e sia ∇ la connessione su S^1 tale che $\nabla X = \sin\theta X$. Sia Y il campo tangente lungo f definito da $Y\theta = \sin(\theta)X$ si calcoli $\overline{\nabla}_{\frac{d}{dt}} Y$.

1.6.3 Trasporto parallelo

Il cardine della geometria Euclidea è il concetto di parallelismo, il trasporto parallelo è la sua versone dinamica. Le connessioni permettono di definire l'operazione di trasposto parallelo di vettori lungo curve. Diamo la seguente definizione.

Definizione 1.6.3.1. *Sia $J = (a, b)$ un intervallo reale aperto, $\gamma : J \to M$ una applicazione liscia. Un campo X definito lungo γ, $X \in \mathcal{X}_\gamma$ si dice parallelo a γ (vedere 1.22) se soddisfa*

$$\overline{\nabla}_{\frac{d}{dt}} X = 0 \tag{1.24}$$

Notiamo che l'equazione dei campi paralleli è lineare e quindi l'insieme dei campi paralleli a γ è uno spazio vettoriale V_γ. Dimostreremo che ha dimensione $m = dim(M)$. Per questo fissiamo $\bar{t} \in J$, $p = \gamma(\bar{t})$ e $V \in T_{M,p}$. Vogliamo mostrare che il problema

$$\overline{\nabla}_{\frac{d}{dt}} X(t) = 0 \qquad X(\bar{t}) = V$$

ha una sola soluzione in $\mathcal{X}_\gamma$.

Per questo cominceremo a vedere che esiste un intorno J' di $\bar{t}$ tale la soluzione esiste unica in J' Scelto un intorno coordinato (U, φ) di p e un intorno di $J' \subset J$ di $\bar{t}$ tale che $\gamma(J') \subset U$. Posto

$$d\varphi(V) = \sum \bar{x}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

in tali coordinate cerchiamo il campo parallelo a $\gamma|_{J'}$ con valore V in $\bar{t}$. Utilizzando l'equazione 1.23 abbiamo,

$$\sum_k \left(\frac{dx_k}{dt} + \Gamma^k_{i,j} a_j(t) x_i(t)\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0, \quad x_i(\bar{t}) = \overline{x}_k$$

Dato che i campi $\frac{\partial}{\partial x_k}$ sono indipendenti abbiamo

$$\frac{dx_k}{dt} + \sum \Gamma^k_{i,j}(t) a_j(t) x_i(t) = 0 \quad x_k(\bar{t}) = \overline{x}_k. \tag{1.25}$$

dove $\Gamma^k_{i,j}(t) = \Gamma^k_{i,j}(a_1(t), \ldots a_k(t))$. Abbiamo un sistema di equazioni differenziali lineari al primo ordine con dato iniziale fissato. Possiamo trovare un intorno aperto

$$\bar{t} \in J'' \subset J'$$

tale che 1.25 ha soluzione per ogni dato iniziale, (è sufficiente risolvere il problema per i dati $\overline{x}_k. = \delta_{ij} \quad \delta_{ii} = 1 \ \delta_{ij} = 0 \ i \neq j$). Per ogni intervallo aperto $A \subset J$ indichiamo con $V(A)$ i campi paralleli alla γ restrizione di γ ad A. Allora per ogni punto $\bar{t} \in J$ esiste un intorno $\bar{t} \in J''$ tale che $\dim V(J'') = m$. Inoltre per l'unicità delle soluzioni abbiamo che per ogni $s \in J''$ l'applicazione di restrizione $\rho_s : V(J'') \to T_{M,\gamma(s)}$

$$\rho_s(X) = X_{\gamma(s)}$$

è un isomorfismo lineare. Allora per ogni s e $z \in J''$ il **trasporto parallelo** è l'isomorfismo lineare $\tau_{s,z} = T_{M,\gamma(s)} \to T_{M,\gamma(z)}$:

$$\tau_{s,z}(v) = \rho_z \rho_s^{-1}(v) \tag{1.26}$$

Notiamo

1. se $v \in T_{M,\gamma(s)}$ allora $v(t) = \tau_{s,t}(v)$ è il campo parallelo che avente v come valore in s.

2. se s, z e w sono in J'' allora si ha

$$\tau_{s,z} = \tau_{s,w} \tau_{w,z}.$$

Queste osservazioni mostrano che possiamo prendere $J'' = J$. Sia infatti (c, d) un intervallo massimale in cui $\dim V((c, d)) = m$. Supponiamo per esempio $d < b$ e prendiamo un intervallo $(d-T, d+T)$ per il quale il trasporto parallelo 1.26 è defnito. Fissati $w \in (c-T, c)$ e $s, z \in (a, c+T)$ poniamo:

$$\tau_{s,z} = \tau_{s,w} \tau_{w,z}.$$

che è ben definito per l'unicità delle soluzioni. Ma se per ogni $v \in T_{M,\gamma(s)}$ poniamo

$$v(t) = \tau_{s,t}(v)$$

otteniamo un campo parallelo a γ sull'intervallo $(a, d+T)$. Questo contraddice la massimalità di (a, b). Abbiamo allora:

Proposizione 1.6.3.2. *Per ogni curva $\gamma : J \to M$ sia V_γ lo spazio dei campi paralleli a γ. Valgono allora:*

1) $\dim V_\gamma = dim(M)$

2) $\forall s \in J \;\; \rho_s : V_\gamma \to T_{M,\gamma(s)}$
$$\rho_s(X) = X_{\gamma(s)}$$
è un isomorfismo lineare.

3) Il trasporto parallelo $\tau_{s,z} = \rho_z \rho_s^{-1}$ *è definito* $\forall s, z \in J$

4) $\forall v \in T_{M,\gamma(s)}$ $v(t) = \tau_{s,t}(v)$ *è un campo parallelo:*
$$\nabla_{\frac{d}{dt}} v(t) = 0 \qquad v(s) = v$$

5) $\tau_{s,s} = id_{T_{M,\gamma(s)}}$ $\tau_{s,z}^{-1} = \tau_{z,s}$ *e* $\tau_{s,z} = \tau_{s,w}\tau_{w,z}$. $\forall s, z, w \in J$.

Esercizi 1.6.3.3. *1) Calcolare il trasporto parallelo per la connessione standard su* $\mathbb{R}^m$

2) Si calcoli il trasporto parallelo per la derivata covariante in $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ *lungo i paralleli.*

1.6.4 Il Tensore di Curvatura

L'integrazione simultanea di più campi vettoriali è trattata dal teorema di Frobenius. Analogo problema è quello del traporto parallelo lungo sottovarietà. Vi è una ostruzione locale la curvatura. Questo concetto è di importanza centrale nella geometria differenziale.

Definizione 1.6.4.1. *Siano* M *una varietà liscia,* $\mathcal{X}(M)$ *lo spazio dei campi lisci su* M *e* ∇ *una connessione lineare. La funzione* $R = R_\nabla = R(X,Y)Z : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ *definito da*
$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$
è detta curvatura di ∇.

Dati due operatori A e B defiiniti su $\mathcal{X}(M)$ poniamo $[A,B] = AB - BA$, possiamo definire la curvatura come l'operatore su $\mathcal{X}$ definito da
$$R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}.$$

Abbiamo
$$R(X + X', Y)Z = R(X,Y)Z + R(X',Y)Z,$$
$$R(X, Y + Y')Z = R(X,Y)Z + R(X,Y')Z,$$
$$R(X,Y)(Z + Z') = R(X,Y)Z + R(X,Y)Z'.$$

Inoltre abbiamo un'antisimmetria sulle prime due componenti:
$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z.$$

Passiamo ora a studiare una caratteristica cruciale di R: la sua natura *puntuale*. Cominciamo col dimostrare il seguente:

Lemma 16. *Siano* f, g *e* h *funzioni in* $\mathscr{C}^\infty(M)$ *allora*
$$R(fX, gY)hZ = (fgh)R(X,Y)Z$$

Dimostrazione. Calcolo diretto:

$$\nabla_{fX}\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_{fX}Z-\nabla_{[fX,Y]}Z=f(\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z)-Y(f)\nabla_X Z$$

$$-f\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_{Y(f)X}Z=fR(X,Y)Z-Y(f)\nabla_X Z+Y(f)\nabla_X Z=fR(X,Y)Z.$$

Si usi l' antisimmetria $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$ per la g. Infine

$$\nabla_X\nabla_Y hZ-\nabla_Y\nabla_X hZ-\nabla_{[X,Y]}hZ=hR(X,Y)Z+X(h)\nabla_Y+Z\nabla_X(Y(h))Z-$$

$$Y(h)\nabla_X Z-\nabla_Y(X(h))Z-[X,Y](h)Z=hR(X,Y)Z+(XY(h)-YX(h)-$$

$-[X,Y](h))Z=hR(X,Y)Z$ □

Lemma 17. *Sia p un punto di M.*

1) Sia W un campo vettoriale nullo in p, $W_p=0$ allora

$$(R(W,Y)Z)_p=(R(X,W)Z)_p=(R(X,Y)W)_p=0.$$

2) Se $X_p=X'_p$; $Y_p=Y'_p$, $Z_p=Z'_p$ allora

$$(R(X,Y)Z)_p=(R(X',Y')Z')_p.$$

Dimostrazione. 1) Scegliamo una base di campi vettoriali $\{X_i\}$ $i=1,\dots m$ in un intorno U di p (per esempio il pull-back delle derivate parziali di un intorno coordinato). Su U poniamo $W=\sum a_iX_i$, $a_i\in\mathscr{C}^\infty$ e $a_i(p)=0$. La connessione ∇ è un operatore locale e quindi il lemma 16 vale per le funzioni in $\mathscr{C}^\infty(U)$:

$$R(W,Y)Z=(R(\sum a_iX_i,Y)Z)_p=(\sum a_iR(X_i,Y)Z)_p=$$

$$\sum a_i(p)(R(X_i,Y)Z)_p=0$$

Nello stesso modo si provano le altre due relazioni.

2) Dall primo passo abbiamo $R(X-X',Y)Z)_p=0$. Allora

$$(R(X,Y)Z)_p=(R(X',Y)Z)_p=(R(X',Y')Z)_p=(R(X',Y')Z')_p$$

□

Definizione 1.6.4.2. *Un tensore su M di tipo s,r è una sezione liscia del fibrato*

$$T_M^{\otimes s}\otimes T_M^{*\otimes r}=Hom(T_M^{\otimes r},T_M^{\otimes s}).$$

Lemma 18. *I tensori K di tipo $1,s$. sono in corrisponenza con le applicazioni multilineari $K(X_1,\dots,X_s):\mathcal{X}(M)^s\to\mathcal{X}(M)$ tali che :*

1) siano locali : se $X_{i,p}=0$ per $p\in U$ allora $K(\dots X_i,\dots)p=0$

2) siano multilineare rispetto alle funzioni liscie: se $f\in\mathscr{C}^\infty$ allora $K(\dots fX_i,\dots)=fK(\dots X_i,\dots)\ \forall i$.

Dimostrazione. Si procede come nel lemma 17. □

I tensori sono quello che intendevamo per oggetti *puntuali.*

Proposizione 1.6.4.3. *La curvatura R è un tensore di tipo* $1,3$.

Le precedenti proposizioni provano che possiamo calcolare la curvatura usando qualsiasi base di campi vettoriali. Per esempio se usiamo $X_i = \frac{\partial}{\partial x_k}$, usando i simboli di Christoffel in coordinate:

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_r R^r_{ijk} X_r = \nabla_{X_i} \sum_s \Gamma^s_{j,k} X_s - \nabla_{X_j} \sum_s \Gamma^s_{i,k} X_s =$$

$$\sum_s (\Gamma^s_{j,k})_{x_i} X_s - \sum_s (\Gamma^s_{i,k})_{x_j} X_s + \sum_s \sum_r \Gamma^s_{j,k} \Gamma^r_{i,s} X_r - \sum_s \sum_r \Gamma^s_{i,k} \Gamma^r_{j,s} X_r =$$

$$\sum_r ((\Gamma^r_{j,k})_{x_i} - (\Gamma^r_{i,k})_{x_j} + \sum_s (\Gamma^s_{j,k} \Gamma^r_{j,s} - \Gamma^s_{i,k} \Gamma^r_{i,s})) X_r$$

$$R^r_{ijk} = (\Gamma^r_{j,k})_{x_i} - (\Gamma^r_{i,k})_{x_j} + \sum_s (\Gamma^s_{j,k} \Gamma^r_{i,s} - \Gamma^s_{i,k} \Gamma^r_{i,s}).$$

Un altro tensore, di tipo $(1,2)$ importante è la torsione di una connessione:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Esercizi 1.6.4.4.

Dimostratre che la torsione è un tensore.

Calcolare la torsione di una connessione in coordinate locali.

Capitolo 2

Forme differenziali

2.1 Algebra esterna

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Una *forma p-lineare* su V è una applicazione

$$\omega : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p \text{ volte}} \to \mathbb{R}$$

che è lineare in ogni argomento. Ciò significa che per ogni $j \in \{1, \ldots, p\}$, $\forall v_1, \ldots, v_p, w \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\omega(v_1, \ldots, \lambda v_j + \mu w, \ldots, v_p) = \lambda\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_p) \\ +\mu\omega(v_1, \ldots, w, \ldots, v_p).\end{aligned}$$

Una forma p-lineare su V è detta *antisimmetrica* o *alternante* se scambiando fra loro due argomenti il valore cambia di segno. In altre parole una p-forma ω è alternante se per ogni coppia di indici $i < j$ e per ogni scelta dei vettori $v_1, \ldots, v_p \in V$

$$\omega(v_1, ..., v_i, ...v_j, ..., v_p) = -\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_p). \tag{2.1}$$

Esercizio 1. *Se ω è alternante e ci sono due indici $i < j$ tali che $v_i = v_j$ allora $\omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = 0$.*

Esercizio 2. *Se ω è una p-forma antisimmetrica e i vettori $v_1, ..., v_p \in V$ sono linearmente dipendenti, allora $\omega(v_1, ..., v_p) = 0$.*

Esercizio 3. *Indichiamo con $\mathfrak{S}(p)$ il gruppo simmetrico su p elementi. Se $\sigma \in \mathfrak{S}(p)$ indichiamo con $(-1)^\sigma$ il segno di σ. Se ω è una forma p-lineare alternante e σ è una permutazione su p elementi allora*

$$\omega(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_p}) = (-1)^\sigma \omega(v_1, \ldots, v_p). \tag{2.2}$$

(Cfr. Lemma 69.)

Lo spazio vettoriale delle forme p-lineari alternanti su V si indica con il simbolo $\Lambda^p V^*$. Se $p > n$, p vettori sono sempre linearmente dipendenti, dunque $\Lambda^p V^* = \{0\}$ per $p > n$.

Fissiamo un numero naturale positivo n. (Nel seguito n sarà sempre la dimensione dello spazio vettoriale che si sta considerando.) Un p-indice I è una p-upla (ordinata) di numeri fra 1 ed n: $I = (i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p$. Un p-indice è *crescente* è un p-indice $I = (i_1, \dots, i_p)$ tale che $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$. Eccetto che nell'appendice 5 i multi-indici saranno crescenti.

Esercizio 4. *Il numero dei p-indici crescenti su n elementi è*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Se $\{e_1, ..., e_n\}$ è una base di V, indichiamo con $\{e^1, ..., e^n\}$ la base duale. Ciò significa che $e^j \in V^*$ è il funzionale definito dalla relazione

$$e^j(e_i) = \delta_{ij}.$$

Dato un p-indice crescente $I = (i_1, ..., i_p)$ definiamo $e^I \in \Lambda^p V^*$ mediante la formula

$$e^I(v_1, ..., v_p) = \det\big(e^{i_k}(v_j)\big)_{1 \leq k,j \leq p}. \tag{2.3}$$

Esercizio 5. *Sia $\{e_i\}$ la base standard di $\mathbb{R}^n$. Per $\sigma \in \mathfrak{S}(p)$ indichiamo con A_σ la matrice che ha come colonne i vettori $\{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\}$. Dimostrare che*

$$A : \mathfrak{S}(p) \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \qquad \sigma \mapsto A_\sigma$$

è un omomorfismo di gruppi e che $\det A_\sigma = (-1)^\sigma$.

Esercizio 6. *Dimostrare che se $j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, n\}$ si ha*

$$e^I(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{cases} 0 & \textit{se } \{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\} \\ (-1)^\sigma & \textit{se } \sigma \in \mathfrak{S}(p) \textit{ e } j_k = i_{\sigma(k)} \textit{ per } 1 \leq k \leq p. \end{cases} \tag{2.4}$$

Lemma 19. *Sia $\{e_1, ..., e_n\}$ una base di V. Al variare di I fra i p-indici crescenti, le forme e^I formano una base di $\Lambda^p(V^*)$. In particolare*

$$\dim \Lambda^p V^* = \binom{n}{p}.$$

Dimostrazione. Sia $\omega \in \Lambda^p V^*$. Per ogni p-indice crescente $I = (i_1, \dots, i_p)$ poniamo $\omega_I = \omega(e_{i_1}, ..., e_{i_p})$ e

$$\alpha = \sum_I \omega_I e^I \tag{2.5}$$

dove la somma è su tutti i p-indici crescenti. Vogliamo dimostrare che $\alpha = \omega$. Incominciamo dimostrando che per ogni scelta degli indici $1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n$ si ha

$$\alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}). \tag{2.6}$$

Infatti se gli indici $j_1, \dots, j_p$ non sono tutti distinti entrambi i termini si annullano e dunque sono uguali. Altrimenti $\{j_1, \dots, j_p\}$ è un insieme con esattamente p elementi e c'è un unico p-indice crescente $I_0 = (i_1, \dots, i_p)$ tale che $\{j_1, \dots, j_p\} = \{i_1, \dots, i_p\}$. Inoltre $j_k = i_{\sigma(k)}$ per una permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}(p)$. Per l'esercizio precedente abbiamo

$$\alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \omega_{I_0} e^{I_0}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = (-1)^\sigma \omega_{I_0}.$$

D'altro canto per la (2.2)

$$\omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = (-1)^\sigma \omega_{I_0}.$$

Dunque la (2.6) è dimostrata. Dati p vettori $v_1, \dots, v_p \in V$ esprimiamo ciascuno di essi in termini della base

$$v_i = \sum_{j_i=1}^{n} v_i^{j_i} e_{j_i}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \dots, v_p) &= \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^{n} v_1^{j_1} \cdots v_p^{j_p} \ \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^{n} v_1^{j_1} \cdots v_p^{j_p} \ \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \alpha(v_1, \dots, v_p). \end{aligned}$$

Dunque $\omega = \alpha$. $\square$

Poniamo $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ e

$$\Lambda^* V^* = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p V^*.$$

Un elemento generico di $\Lambda^* V^*$ è della forma

$$\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n$$

dove $\omega_i \in \Lambda^i V^*$. Identifichiamo $\Lambda^p V^*$ con il sottospazio di $\Lambda^* V^*$ formato dagli elementi della forma

$$0 + \cdots + \omega + \cdots + 0$$

con $\omega \in \Lambda^p V^*$. Questi elementi sono detti *puri*. Se ω è una forma pura appartenente a $\Lambda^p V^*$ diciamo che ω ha *grado* p e scriviamo $\deg \omega = p$.

Vogliamo definire su $\Lambda^* V^*$ una struttura di $\mathbb{R}$-algebra.

Se p e q sono interi positivi indichiamo con $\mathfrak{S}(p, q)$ l'insieme delle permutazioni $\sigma \in \mathfrak{S}(p + q)$ tali che

$$\sigma_1 < \cdots < \sigma_p \qquad \sigma_{p+1} < \cdots < \sigma_{p+q}. \tag{2.7}$$

Se $\alpha \in \Lambda^p V^*$ e $\beta \in \Lambda^q V^*$ con $p, q > 0$ definiamo una $p + q$-forma

$$\alpha \wedge \beta : V^{p+q} \to \mathbb{R}$$

mediante la formula

$$\alpha \wedge \beta \, (v_1, ..., v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q)} (-1)^\sigma \alpha(v_{\sigma_1}, ..., v_{\sigma_p}) \beta(v_{\sigma_{p+1}}, ..., v_{\sigma_{p+q}}). \tag{2.8}$$

Se invece $p = 0$ definiamo $\alpha \wedge \beta$ come il prodotto dello scalare α con $\beta \in \Lambda^q V^*$.

Teorema 20. *Se $\alpha \in \Lambda^p V^*$ e $\beta \in \Lambda^q V^*$ allora $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} V^*$. Estendendo $\wedge$ in modo lineare si ottiene una operazione*

$$\wedge : \Lambda^* V^* \times \Lambda^* V^* \to \Lambda^* V^*$$

chiamata prodotto esterno[1]. *$(\Lambda^* V^*, \wedge)$ è un'algebra associativa sul campo dei numeri reali. Se $\alpha \in \Lambda^p V^*$ e $\beta \in \Lambda^q V^*$ allora*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg\alpha \deg\beta} \beta \wedge \alpha. \tag{2.9}$$

Se $\{e_1, ..., e_n\}$ è una base di V e I è un p-indice crescente, allora $e^I = e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_p}$. L'algebra $\Lambda^* V^*$ è generata dagli elementi $e^1, ..., e^n$ con le relazioni

$$\begin{cases} e^i e^j = -e^j e^i & \text{per } i \neq j \\ e^i e^i = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

$\Lambda^*(V^*)$ è chiamata l'*algebra esterna* sullo spazio vettoriale V. La dimostrazione del teorema è laboriosa e necessita di alcune considerazioni non strettamente necessarie per le applicazioni alle varietà differenziabili. È pertanto relegata all'appendice 5.

È invece importante rendere espliciti alcuni casi particolari della definizione (2.8). Se $p = q = 1$

$$\alpha \wedge \beta(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v). \tag{2.11}$$

Se $\alpha \in \Lambda^1(V^*)$ e $\beta \in \Lambda^2(V^*)$,

$$\alpha \wedge \beta(v, w, u) = \alpha(v)\beta(w, u) - \alpha(w)\beta(v, u) + \alpha(u)\beta(v, w). \tag{2.12}$$

Esercizio 7. *Se $\alpha \in \Lambda^1(V^*)$ e $\beta \in \Lambda^q(V^*)$*

$$\alpha \wedge \beta(v_0, v_1, ..., v_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^q \alpha(v_i)\beta(v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_q) \tag{2.13}$$

dove il simbolo $\hat{v}_i$ indica che il vettore v_i viene saltato.

Dato un vettore $v \in V$ ed una forma $\alpha \in \Lambda^p V^*$ $(p > 1)$ definiamo $i_v\alpha \in \Lambda^{p-1} V^*$ mediante la formula

$$\iota_v\alpha(v_1, ..., v_{p-1}) = \alpha(v, v_1, ...v_{p-1}). \tag{2.14}$$

Se $\alpha \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$, poniamo $\iota_v\alpha = 0$ per ogni $v \in V$. La forma $\iota_v\alpha$ è detta *prodotto interno* o *contrazione* di α e v. Estendendo per linearità si ottiene un operatore

$$\iota_v : \Lambda^* V^* \to \Lambda^* V^*$$

di grado -1, cioè tale che $\iota_v\big(\Lambda^p V^*\big) \subset \Lambda^{p-1} V^*$.

Proposizione 21. *Se α e β sono forme pure e $v \in V$, allora*

$$\iota_v(\alpha \wedge \beta) = (\iota_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg\alpha} \alpha \wedge (\iota_v\beta). \tag{2.15}$$

[1] In inglese si chiama "wedge product".

Per definizione una endomorfismo di un'algebra associativa con la proprietà espressa dalla formula (5.9) si chiama *antiderivazione*. Pertanto ι_v è una antiderivazione di $\Lambda^* V^*$. La dimostrazione è un po' laboriosa ed è relegata all'appendice 5.

Sia W un altro spazio vettoriale e sia $L : W \to V$ un'applicazione lineare. Data $\omega \in \Lambda^p V^*$ definiamo $L^*\omega \in \Lambda^p W^*$ mediante la formula

$$(L^*\omega)(w_1, ..., w_p) := \omega(Lw_1, ..., Lw_p). \tag{2.16}$$

Esercizio 8. *Verificare che $L^* : \Lambda^* V^* \to \Lambda^* W^*$ è un omomorfismo di algebre, cioè $L^*(\alpha \wedge \beta) = L^*\alpha \wedge L^*\beta$.*

Esercizio 9. *Se $L \in \operatorname{End}(V)$ ed $\alpha \in \Lambda^n V^*$ allora $L^*\alpha = \det L \cdot \alpha$. Soluzione: Fissiamo una base $\{e_i\}$ di V e sia $Le_j = a_{ij}e_i$. Poiché $\dim \Lambda^n V^* = 1$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $L^*\alpha = \lambda\alpha$.*

$$L^*\alpha(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1 1} \ldots a_{i_n n} L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) =$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} a_{\sigma_1 1} \ldots a_{\sigma_n n} L(e_{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_n}) = \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} (-1)^\sigma a_{\sigma_1 1} \ldots a_{\sigma_n n} \Big) \cdot L(e_1, \ldots, e_n) =$$
$$= \det L \cdot \alpha(e_1, \ldots, e_n).$$

Pertanto $\lambda = \det L$.

2.2 Forme differenziali

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Il fibrato tangente TM e il fibrato cotangente T^*M sono stati definiti nella prima parte. Esattamente nello stesso modo si possono costruire i fibrati $\Lambda^p T^*M$. Poniamo

$$\Lambda^p T^*M = \bigcup_{x \in M} \Lambda^p T^*_x M$$

e sia $\pi : T^*M \to M$ l'applicazione tale che $\pi(\Lambda^p T^*_x M) = \{x\}$. Ripercorriamo brevemente la costruzione delle carte coordinate come per i fibrati tangente e cotangente.

Sia $(U, \varphi - (x^i))$ una carta coordinata. Per ogni $x \in U$ i vettori

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

formano una base di T_xM. Indichiamo con $dx^1, \ldots, dx^n$ la base duale:

$$dx^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \delta_{ij}.$$

Se $I = (i_1, \ldots, i_p)$ è un p-indice crescente poniamo

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

(In teoria dovremmo indicare il punto x.) Le forme dx^I al variare di I fra i p-indici crescenti costituiscono una base di $\Lambda^p T_x M$. Data una forma $\alpha \in \Lambda^p T_x^* M$ siano α_I le sue coordinate rispetto a questa base:

$$\alpha = \sum_I \alpha_I dx^I.$$

Per semplicità di notazione indichiamo con $N = \binom{n}{p}$ il numero dei p-indici crescenti su n elementi. Scegliamo un ordinamento qualunque per i p-indici crescenti ed associamo ad α il punto $(x, \alpha_{I_1}, \ldots, \alpha_{I_N}) \in U \times \mathbb{R}^N$. In questo modo otteniamo una applicazione

$$\Phi : \pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{x \in U} \Lambda^p T_x^* M \to U \times \mathbb{R}^N.$$

Per costruzione Φ è biunivoca, fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^N \arrow[d, "p_1"] \\
U \arrow[r, "\mathrm{Id}_U"'] & U
\end{tikzcd}$$

e per ogni $x \in U$ la restrizione di Φ a $\Lambda^p T_x^* M$ è un isomorfismo su $\mathbb{R}^N$. Vogliamo mostrare che la collezione delle applicazioni Φ al variare di (U, φ) in un atlante di M dànno a $\Lambda^p T^* M$ la struttura di fibrato vettoriale. È sufficiente controllare che dati due sistemi di coordinate $\varphi = (x^i)$ e $\psi = (y^i)$ sullo stesso apertto $U \subset M$, le corrispondenti applicazioni

$$\Phi, \Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^N$$

sono compatibili, nel senso che

$$\Phi \circ \Psi^{-1} : U \times \mathbb{R}^N \to U \times \mathbb{R}^N$$

è un diffeomorfismo che commuta con la proiezione p_2 e che è lineare su ogni fibra. In realtà l'unica cosa che necessita di una verifica esplicita è il fatto che $\Phi \circ \Psi^{-1}$ sia liscia. Sia infatti $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ il cambiamento di coordinate: $y = f(x)$. Allora $f \in C^\infty(\varphi(U)), \psi(U))$ e

$$dy^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$$

$$dy^I = \sum_{j_1, \ldots, j_p} \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial f^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} =$$

$$= \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p)} \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial f^{i_p}}{\partial x^{j_{\sigma(p)}}} dx^{j_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{\sigma(p)}} =$$

$$= \sum_J \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p)} (-1)^\sigma \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial f^{i_p}}{\partial x^{j_{\sigma(p)}}} dx^J.$$

Dunque

$$dy^I = F^I_J dx^J \qquad F^I_J(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p)} (-1)^\sigma \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_{\sigma(1)}}}(x)\cdots\frac{\partial f^{i_p}}{\partial x^{j_{\sigma(p)}}}(x)$$

e $F^I_J \in C^\infty(U)$. Se $(x, a_{I_1}, \ldots, a_{I_N}) = \Phi\circ\Psi^{-1}(x, b_{I_1}, \ldots, b_{I_N})$ allora

$$\sum_J a_J dx^J = \sum_I b_I dy^I = \sum_{I,J} b_I F^I_J dx^J$$

$$a_J = F^I_J b_I.$$

Pertanto

$$\Phi\circ\Psi^{-1}(x, b_I) = (x, F^I_J(x) b_J).$$

Ciò dimostra che $\Phi\circ\Psi^{-1}$ è liscia.

Definizione 2.2.0.5. *Una p-forma differenziale su M è una sezione liscia del fibrato $\pi : \Lambda^p T^* M \to M$. Lo spazio delle p-forme su M sarà indicato con $\Lambda^p(M)$.*

Per ogni aperto $U \subset M$ si ha $\Lambda^p(U) := \Gamma(U, \Lambda^p T^* M)$.

Esercizio 10. *Sia fissato un atlante $\mathfrak{A}$ di M e sia data una applicazione $\omega : M \to \Lambda^p T^* M$ tale che per ogni $x\in M$, $\omega_x \in \Lambda^p T^*_x M$. Dalla descrizione delle banalizzazioni del fibrato $\Lambda^p T^* M$ appena vista, segue le condizioni seguenti sono equivalenti: (1) ω è una p-forma differenziale, (2) per ogni carta (U, x^i) dell'atlante $\mathfrak{A}$ si ha $\omega = \sum_I a_I(x) dx^I$ dove $a_I \in$* inf(U)*, (3) la stessa condizione vale per ogni carta di M.*

Proposizione 22. *Se $\alpha \in \Lambda^p(M)$ e $\beta\in\Lambda^q(M)$ allora $\alpha\wedge\beta \in \Lambda^{p+q}(M)$.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che la sezione $\alpha\wedge\beta$ è liscia se α e β lo sono. Il problema pertanto è locale e può essere affrontato in una carta coordinata (U, x^i). Sia

$$\alpha = \sum_I a_I(x) dx^I \qquad \beta = \sum_J b_J(x) dx^J.$$

Definiamo le funzioni $c_K : U \to \mathbb{R}$ (per K un $p+q$-indice) mediante la relazione

$$\alpha\wedge\beta = \sum_K c_K(x) dx^K.$$

Il problema si riduce a dimostrare che $c_K \in C^\infty(U)$. Dato un p-indice $I = (i_1, \ldots, i_p)$ poniamo $\tilde{I} = \{i_1 \ldots, i_p\}$. Allora

$$\alpha\wedge\beta = \sum_{I,J} a_I b_J dx^I \wedge dx^J = \sum_K c_K dx^K$$

$$c_K = \sum_{I,J} \varepsilon(I, J, K)$$

dove il coefficiente $\varepsilon(I,J,K)$ è calcolato nel modo seguente. Se $\tilde{I}\cup\tilde{J} \neq \tilde{K}$ allora $\varepsilon(I,J,K) = 0$. Se invece $\tilde{I}\cup\tilde{J} = \tilde{K}$, sia $\sigma \in \mathfrak{S}(p+q)$ la permutazione definita da

$$\sigma(k) = \begin{cases} i_k & 1 \leq k \leq p \\ j_{k-p} & p+1 \leq k \leq p+q. \end{cases}$$

Allora $\varepsilon(I,J,K) = (-1)^\sigma$. È chiaro che $c_K \in C^\infty(U)$. □

Segue dalla proposizione precedente che il prodotto esterno è una operazione su $\Lambda^*(M)$.

Esercizio 11. *Provvista del prodotto esterno puntuale $\Lambda^*(M)$ è un'algebra associativa sull'anello $C^\infty(M)$.*

Se $\alpha \in \Lambda^p(M)$ e $X_1,\dots,X_p \in \mathfrak{X}(M)$ la funzione

$$x \mapsto \alpha_x\big(X_1(x),\dots,X_p(x)\big)$$

è una funzione liscia (dimostrare!). Indichiamo questa funzione con il simbolo $\alpha(X_1,\dots, X_p)$. La p-forma α induce una applicazione

$$\underbrace{\mathfrak{X}(U)\times\cdots\times\mathfrak{X}(U)}_{p \text{ volte}} \to C^\infty(M) \qquad (X_1,\dots,X_p)\mapsto \alpha(X_1,\dots,X_p). \tag{2.17}$$

Esercizio 12. *Consideriamo $\mathfrak{X}(M)$ come un modulo sull'anello $C^\infty(M)$. Dimostrare che l'applicazione* (2.17) *è antisimmetrica e $C^\infty(M)$-multilineare, ossia*

$$\alpha(X_1,\dots,f\cdot X_j,\dots,X_p) = f\cdot\alpha(X_1,\dots,X_j,\dots,X_p)$$

per ogni $X_1,\dots,X_p \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $f \in C^\infty(M)$.

Proposizione 23. *Sia*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(U)\times\cdots\times\mathfrak{X}(U)}_{p \text{ volte}} \to C^\infty(M)$$

una applicazione $C^\infty(M)$-multilineare e antisimmetrica. Allora esiste una forma $\alpha \in \Lambda^p(M)$ tale che $T(X_1,\dots,X_p) = \alpha(X_1,\dots,X_p)$. Pertanto le forme differenziali si possono identificare con le applicazioni antisimmetriche e $C^\infty(M)$-lineari sul $C^\infty(M)$-modulo $\mathfrak{X}(M)$.

Manca dimostrazione

Uno dei vantaggi delle forme rispetto ai campi vettoriali è che hanno un buon comportamento rispetto alle funzioni lisce: ogni applicazione $F \in \mathscr{C}^\infty(M,N)$ induce un operatore lineare

$$F^* : \Lambda^p(N) \to \Lambda^p(M)$$

definito dalla formula

$$(F^*\alpha)(v_1,\dots,v_p) = \alpha\big(DF_x v_1,\dots,DF_x v_p\big)$$

per ogni $x \in M$ e $v_j \in T_xM$. La forma $F^*\alpha$ si chiama *pull-back* di α mediante F.

Esercizio 13. *Sia $F : M \to N$ una applicazione liscia. Supponiamo che $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ e $(V,\ \psi = (y^1, \dots, y^n))$ siano carte coordinate su M ed N rispettivamente, tali che $F(U) \subset V$. Se $y = \overline{F}(x)$ è la rappresentazione locale di F in queste coordinate (cioè $\overline{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$), allora*

$$F^* dy^j = \frac{\partial \overline{F}^j}{\partial x^i} dx^i.$$

Esercizio 14. *Siano $(U, \varphi = (x^i))$ e $(V, \psi = (y^i))$ carte coordinate su M. Sia $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ il cambiamento di coordinate, cioè $y = f(x)$. Allora per ogni $p \in U \cap V$*

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial y^i}$$
$$dy^j(p) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) dx^i(p)$$
$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n(p) = \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)(\varphi(p)) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(p).$$

2.3 Differenziale esterno di de Rham

Sia M una varietà n-dimensionale. Poniamo

$$\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(M).$$

Definiamo un operatore lineare

$$d : C^\infty(M) = \Lambda^0(M) \to \Lambda^1(M)$$

mediante la regola seguente: se $p \in M$ il funzionale $df_p \in T^*_x M$ è tale che per ogni $v \in T_p M$

$$df_p(v) = vf$$

dove vf indica l'azione della derivazione v sul germe di f in p.

Esercizio 15. *Sia $f \in C^\infty(M)$ e sia $(U, \varphi = (x^i))$ una carta coordinata. Sia $\bar{f} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ la rappresentazione locale di f, ossia $\bar{f} = f \circ \varphi$. Allora*

$$df = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i} dx^i.$$

Spesso identificheremo f con la sua rappresentazione locale e scriveremo semplicemente

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Esercizio 16. *Se $f, g \in C^\infty(M)$ allora*

$$d(fg) = fdg + gdf.$$

Esercizio 17. *Sia $f \in C^\infty(M)$ tale che $df \equiv 0$. Dimostrare che f è localmente costante, quindi costante sulle componenti connesse di M. Dimostrare che M è connessa se e solo se le uniche funzioni per cui $df = 0$ sono le costanti.*

Ora vogliamo estendere l'operatore d a tutta l'algebra esterna $\Lambda^*(M)$. Incominciamo con una definizione che riassume le proprietà fondamentali dell'estensione cercata. Alla fine dimostreremo che esiste un unico operatore con queste proprietà.

Definizione 2.3.0.6. *Un* operatore di derivazione esterna[2] *su M è una applicazione $d : \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M)$ con le seguenti proprietà.*

1. *d è $\mathbb{R}$-lineare.*
2. *d è omogeneo di grado 1, ossia $d\big(\Lambda^p(M)\big) \subset \Lambda^{p+1}(M)$.*
3. *Se $f \in C^\infty(M)$, df coincide con la 1-forma precedentemente definita.*
4. *Se $f \in C^\infty(M)$ allora $d^2 f = 0$;*
5. *$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$.*

Vogliamo dimostrare che su ogni varietà differenziabile esiste un unico operatore di derivazione esterna. Deduciamo innanzitutto alcune conseguenze della definizione appena data.

Esercizio 18. *Sia d un operatore di derivazione esterna su una varietà M. Provare che per $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \Lambda^1(M)$*

$$d\big(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q\big) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_i \wedge \cdots \wedge \alpha_q.$$

Esercizio 19. *Siano $f, f_1, \dots, f_p \in C^\infty(M)$ e $\alpha = f df_1 \wedge \cdots \wedge df_p$. Se d è un operatore di derivazione esterna su M allora*

$$d\alpha = df \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_p.$$

Proposizione 24. *Se d è un operatore di derivazione esterna su M e $\alpha \in \Lambda^*(M)$ è una forma che si annulla identicamente su un aperto $U \subset M$, allora anche $d\alpha = 0$ su U*[3].

Dimostrazione. Per linearità possiamo limitarci al caso in cui $\alpha \in \Lambda^p(M)$. Sia $x \in U$ e sia $\chi \in C_0^\infty(U)$ una funzione tale che $\chi = 1$ in un intorno di x. Dunque $1 - \chi \equiv 1$ fuori di U. Pertanto $\alpha = (1 - \chi)\alpha$ e

$$d\alpha = d(1 - \chi) \wedge \alpha + (1 - \chi) \wedge d\alpha = -d\chi \wedge \alpha + (1 - \chi) \wedge d\alpha.$$

Poiché χ è costante in un intorno di x segue dalla proprietà (3) che $d\chi(x) = 0$. Peraltro $\chi(x) = 1$. Dunque $d\alpha(x) = 0$. $\square$

[2] *Differenziale esterno* è sinonimo di "operatore di derivazione esterna".

[3] Se E ed F sono fibrati vettoriali su M diciamo che un operatore $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ è *locale* se $s_{|U} \equiv 0 \Rightarrow Ps_{|U} \equiv 0$. La proposizione afferma che ogni operatore di derivazione esterna è un operatore locale.

Lemma 25. *Ogni punto di M ammette un intorno sul quale ogni $\alpha \in \Lambda^p(M)$ si scrive come somma di forme del tipo $f df_1 \wedge \cdots \wedge df_p$ con $f, f_1, \dots, f_p \in C^\infty(M)$.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $x \in M$. Sia (V, x^i) una carta con $x \in V$ e sia $\chi \in C_0^\infty(V)$ tale che $\chi = 1$ su un intorno U di x. Se $\alpha \in \Lambda^p(M)$, esistono funzioni $\alpha_I \in C^\infty(U)$ tali che $\alpha = \sum_I \alpha_I dx^I$. Poniamo $f_j = \chi x^j$ e $g_I = \chi \alpha_I$. Estendendo a zero fuori di V possiamo considerare f_j e g_I come funzioni lisce su tutta M. Su U $\chi = 1$, dunque $\alpha = \sum_I g_I df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_p}$. □

Proposizione 26. *Se d è un operatore di derivazione esterna su M, allora $d^2 = 0$.*

Dimostrazione. Per il lemma precedente possiamo limitarci a considerare le forme del tipo $\alpha = f df_1 \wedge \cdots \wedge f_p$ con $f, f_j \in C^\infty(M)$. Per la proprietà (5)

$$d\alpha = df \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_p$$
$$d^2\alpha = d^2 f \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_p - df \wedge d\big(df_1 \wedge \cdots \wedge df_p\big).$$

Per l'esercizio 18

$$d\big(df_1 \wedge \cdots \wedge df_p\big) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} df_1 \wedge \cdots d^2 f_i \cdots \wedge df_p.$$

Per la proprietà (4) $d^2 f = d^2 f_j = 0$. Dunque $d^2\alpha = 0$. □

Lemma 27. *Se $U \subset M$ è un aperto di M, ogni operatore di derivazione esterna su M induce un operatore di derivazione esterna su U.*

Dimostrazione. Si noti che non tutte le forme su U si estendono ad M. Dunque non possiamo semplicemente restringere d ad un sottospazio. È necessario usare la proprietà di località. Se $\beta \in \Lambda^p(U)$ ed $x \in U$ scegliamo una funzione $\chi \in C_0^\infty(U)$ che sia $= 1$ vicino ad x. Allora $\chi\beta \in \Lambda^p(M)$. Poniamo $d'\beta(x) = d(\chi\beta)(x)$. Questa definizione non dipende dalla scelta della funzione χ perché d è un operatore locale. È immediato verificare che d' è un operatore di derivazione esterna su U. □

Mostriamo ora che su ogni carta coordinata esiste un operatore di derivazione esterna. Se (U, x^i) è una carta coordinata ed $f \in C^\infty(U)$, poniamo

$$d_U f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i.$$

Se $\alpha \in \Lambda^p(U)$ è della forma $\alpha = f dx^I$ con $f \in C^\infty(U)$, allora poniamo

$$d_U \alpha = d_U f \wedge dx^I.$$

Estendendo per linearità otteniamo un operatore $d_U : \Lambda^*(U) \to \Lambda^*(U)$.

Lemma 28. *Se (U, x^i) è una carta coordinata, l'operatore $d_U : \Lambda^*(U) \to \Lambda^*(U)$ è un operatore di derivazione esterna su U.*

Dimostrazione. (1), (2) e (3) della Def. 2.3.0.6 seguono immediatamente dalla definizione. La (4) è una conseguenza del Teorema di Schwarz sulle derivate miste:

$$
\begin{aligned}
d_U d_U f = d_U \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = \sum_j d_U \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \wedge dx^j = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \\
= \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = \\
= \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}) dx^i \wedge dx^j = 0.
\end{aligned}
$$

Inoltre la (5) vale per $\alpha, \beta \in \Lambda^0(M) = C^\infty(M)$. In tal caso essa si riduce alla regola di derivazione del prodotto di funzioni. Per dimostrare la (5) in generale possiamo supporre $\alpha = f dx^I \in \Lambda^p(U)$ e $\beta = g dx^J \in \Lambda^q(U)$. Dunque

$$
\begin{aligned}
d_U(\alpha \wedge \beta) = d_U(fg\, dx^I \wedge dx^J) \\
d_U \alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d_U \beta = (d_U f \wedge dx^I) \wedge (g dx^J) + (-1)^p (f dx^I) \wedge (d_U g \wedge dx^J) = \\
= g d_U f \wedge dx^I \wedge dx^J + (-1)^p f dx^I \wedge d_U g \wedge dx^J.
\end{aligned}
$$

Indichiamo con $\tilde{I}$ l'insieme formato dagli indici contenuti in I. Se $\tilde{I} \cap \tilde{J} \neq 0$ la (5) vale perché entrambi i termini sono nulli. Altrimenti sia K il $p+q$-indice crescente tale che $\tilde{K} = \tilde{I} \cup \tilde{J}$ e sia $\varepsilon = \pm 1$ tale che $dx^I \wedge dx^J = \varepsilon dx^K$. Allora

$$
\begin{aligned}
d_U(\alpha \wedge \beta) = d_U(\varepsilon fg\, dx^K) = \varepsilon d_U(fg) \wedge dx^K = \varepsilon(g d_U f + f d_U g) \wedge dx^K = \\
= g d_U f \wedge dx^I \wedge dx^J + f d_U g \wedge dx^I \wedge dx^J = \\
= g d_U f \wedge dx^I \wedge dx^J + (-1)^p f dx^I \wedge d_U g \wedge dx^J = d_U \alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d_U \beta
\end{aligned}
$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Teorema 29. *Su ogni varietà differenziabile esiste un unico operatore di derivazione esterna.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto l'unicità. Siano assegnati due operatori di derivazione esterna $d_1, d_2 : \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M)$. Data $\alpha \in \Lambda^p(M)$ vogliamo provare che $d_1 \alpha = d_2 \alpha$. Fissiamo $x \in M$ ed un intorno U con la proprietà del lemma 25: esistono delle forme α_k, che sono del tipo $\alpha_k = f df_1 \wedge \cdots \wedge df_p$ con $f, f_j \in C^\infty(M)$, tali che su U si abbia $\alpha = \sum_k \alpha_k$. Per l'esercizio 19

$$
d_1 \alpha_k = d_1 f \wedge d_1 f_1 \wedge \cdots \wedge d_1 f_p.
$$

Pertanto $d_1 \alpha_k = d_2 \alpha_k$ per ogni k perché il $d_1 = d_2$ sulle funzioni. Per la Prop. 24 su U si ha

$$
d_1 \alpha = \sum_k d_1 \alpha_k = \sum_k d_2 \alpha_k = d_2 \alpha.
$$

Dunque $d_1 \alpha = d_2 \alpha$ in un intorno di x. Poiché x è arbitrario ciò prova che $d_1 = d_2$.

In particolare se (U, x^i) è un aperto coordinato, l'operatore d_U dipende da U, ma non dalle coordinate scelte su U.

Veniamo all'esistenza. Fissiamo $\alpha \in \Lambda^p T^*M$ ed una carta coordinata (U, x^i). Su U poniamo

$$d\alpha = d_U \alpha_{|U}. \tag{2.18}$$

Dobbiamo provare che questa definizione on dipende dalla scelta della carta. Sia (V, y^i) è un'altra carta coordinata con $U \cap V \neq \emptyset$. Per l'unicità, gli operatori d_U e d_V inducono lo stesso operatore su $U \cap V$. Dunque su $U \cap V$

$$d_U \alpha_{|U} = d_V \alpha_{|V}.$$

Pertanto la formula (2.18) non dipende dalla carta scelta. È immediato verificare che d è un operatore di derivazione esterna perché tutte le proprietà si possono verificare localmente. □

Lemma 30. *Siano $\alpha \in \Lambda^1(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Allora*

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]). \tag{2.19}$$

Dimostrazione. Poiché (2.19) è lineare in α possiamo supporre $\alpha = f dx^1$. Sia

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Allora

$$[X, Y] = (XY^j - YX^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$$
$$d\alpha(X, Y) = df \wedge dx^1(X, Y) = df(X)dx^1(Y) - df(Y)dx^1(X) = Xf \cdot Y^1 - Yf \cdot X^1$$
$$X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]) = X(fY^1) - Y(fX^1) - f dx^1([X, Y]) =$$
$$= Xf \cdot Y^1 + fXY^1 - Yf \cdot X^1 - fYX^1 - f(XY^1 - YX^1) = Xf \cdot Y^1 - Yf \cdot X^1.$$

□

Teorema 31. *Se $\alpha \in \Lambda^p(M)$ e $X_0, \ldots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$ allora*

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, ..., X_p) = &\sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i\, \alpha(X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_p) + \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha\big([X_i, X_j], X_0, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_p\big). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dimostrazione. Dal lemma precedente sappiamo già che la formula vale per $p = 1$. Dimostriamo per induzione che vale per p qualsiasi. Poiché entrambi i membri dell'equazione sono lineari in α possiamo supporre $\alpha = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$. Poniamo $\varphi = dx^1$ e $\beta = f dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p$. Dunque $\alpha = \varphi \wedge \beta$, $d\varphi = 0$ e $d\alpha = -\varphi \wedge \beta$. Siano $X_0, \ldots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$ e supponiamo inizialmente che

$$[X_i, X_j] = 0. \tag{2.21}$$

Allora

$$d\alpha(X_0,\dots,X_p) = -\varphi\wedge d\beta(X_0,\dots,X_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+1}\varphi(X_i)d\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots).$$

Applicando l'ipotesi induttiva a β e sfruttando (2.21)

$$\begin{aligned} d\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots) &= \sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k X_k\beta(\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots)+\\ &+\sum_{k=i+1}^{p}(-1)^{k-1}X_k\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots)\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0,\dots,X_p) &= -\sum_{k<i}^{p}(-1)^{k+i}\varphi(X_i)\cdot X_k\beta(\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots)+\\ &+\sum_{i<k}^{p}(-1)^{k+i}\varphi(X_i)\cdot X_k\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots).\end{aligned} \tag{2.22}$$

D'altro canto

$$\alpha(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p) = \varphi\wedge\beta(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p) =$$
$$=\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k\varphi(X_k)\beta(\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots)+\sum_{k=i+1}^{p}(-1)^{k-1}\varphi(X_k)\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots)$$
$$\begin{aligned} X_i\big(\alpha(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p)\big) &= \sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k\,X_i\varphi(X_k)\cdot\beta(\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots)+\\ &+\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k\varphi(X_k)\cdot X_i\beta(\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots)+\\ &+\sum_{k=i+1}^{p}(-1)^{k-1}\,X_i\varphi(X_k)\cdot\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots)+\\ &+\sum_{k=i+1}^{p}(-1)^{k-1}\varphi(X_k)\cdot X_i\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots)\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i X_i\alpha(X_0,\dots,X_p) = \sum_{k<i}(-1)^{i+k}\, X_i\varphi(X_k)\cdot\beta(\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots)+\\ +\sum_{k<i}(-1)^{i+k}\varphi(X_k)\cdot X_i\beta(\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots)+\\ -\sum_{i<k}^{p}(-1)^{i+k}\, X_i\varphi(X_k)\cdot\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots)+\\ -\sum_{i<k}^{p}(-1)^{i+k}\varphi(X_k)\cdot X_i\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Siccome $d\varphi == 0$ e $[X_i, X_j] = 0$, $X_i\varphi(X_k) = X_k\varphi(X_i)$. Dunque scambiando gli indici

$$\begin{aligned}\sum_{i<k}^{p}(-1)^{i+k}\, X_i\varphi(X_k)\cdot\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots) =\\ =\sum_{k<i}^{p}(-1)^{i+k}\, X_k\varphi(X_i)\cdot\beta(\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots) =\\ =\sum_{k<i}^{p}(-1)^{i+k}\, X_i\varphi(X_k)\cdot\beta(\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots).\end{aligned}$$

Pertanto la prima e la terza sommatoria in (2.23) si elidono e

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i X_i\alpha(X_0,\dots,X_p) = \sum_{k<i}(-1)^{i+k}\varphi(X_k)\cdot X_i\beta(\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots)+\\ -\sum_{i<k}^{p}(-1)^{i+k}\varphi(X_k)\cdot X_i\beta(\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots).\end{aligned}$$

Scambiando di nuovo gli indici i e k e usando la (2.22) e la (2.21) si ottiene la (2.20). Pertanto la formula (2.20) è dimostrata per p qualunque nel caso in cui i campi commutano. In particolare essa vale se i campi X_i sono campi coordinati. Per ottenere il risultato nel caso di campi qualsiasi è sufficiente provare che se (2.20) vale per i campi $X_0,\dots,X_p$ allora vale anche per i campi $Y_0 = f \cdot X_0$, $Y_j = X_j$ per $j > 0$, dove f è una funzione. Infatti si ha

$$
\begin{aligned}
&[Y_o, Y_j] = f[X_0, X_j] - (X_j f)X_0 \qquad \text{per } j > 0 \\
&\sum_{i=0}^{p}(-1)^i Y_i \alpha(\dots, \hat{Y}_i, \dots) = Y_0 \alpha(Y_1, \dots, Y_p) + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i X_i\big(f \cdot \alpha(\dots, \hat{X}_i, \dots)\big) = \\
&\qquad = f \sum_{i=0}^{p}(-1)^i X_i \alpha(\dots, \hat{X}_i, \dots) + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i X_i f \cdot \alpha(\dots, \hat{X}_i, \dots)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([Y_i, Y_j], \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots) = \\
&\qquad = \sum_{0<j}(-1)^j \alpha([Y_0, X_j], \hat{Y}_0, \dots, \hat{X}_j, \dots) + \\
&\qquad + \sum_{0<i<j}(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], fX_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots) = \\
&\qquad = f \sum_{0<j}(-1)^j \alpha([X_0, X_j], \hat{X}_0, \dots, \hat{X}_j, \dots) - \sum_{0<j}(-1)^j X_j f \cdot \alpha(X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots) + \\
&\qquad + f \sum_{0<i<j}(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{p}(-1)^i Y_i \alpha(\dots, \hat{Y}_i, \dots) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([Y_i, Y_j], \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots) = \\
&\qquad = f\left[\sum_{i=0}^{p}(-1)^i X_i \alpha(\dots, \hat{X}_i, \dots) + \sum_{0<j}(-1)^j \alpha([X_0, X_j], \hat{X}_0, \dots, \hat{X}_j, \dots)\right]
\end{aligned}
$$

D'altro canto $d\alpha(Y_0, \dots, Y_p) = f d\alpha(X_0, \dots, X_p)$. Poiché per ipotesi

$$
\begin{aligned}
d\alpha(X_0, \dots, X_p) = &\sum_{i=0}^{p}(-1)^i X_i\, \alpha(X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_p) + \\
+ &\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha\big([X_i, X_j], X_0, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_p\big)
\end{aligned}
$$

otteniamo

$$
d\alpha(Y_0, \dots, Y_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i Y_i \alpha(\dots, \hat{Y}_i, \dots) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([Y_i, Y_j], \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots).
$$

□

Lemma 32. *Per ogni applicazione liscia $F : M \to N$ e per ogni $\alpha \in \Lambda^p(N)$ si ha*

$$
F^* \, d\alpha = d(F^* \alpha) \tag{2.24}
$$

Dimostrazione. La questione è locale. Dunque possiamo supporre che M ed N siano aperti di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che allora $C^\infty(N)$ e $dy^1, \dots, dy^n$ generano $\Lambda^*(N)$ come algebra. Verifichiamo la (2.24) per questi generatori. Se $\alpha = dy^j$ allora $F^* d\alpha = 0$, mentre (usando l'esercizio 13) $F^*\alpha = dF^j$ dunque anche $dF^*\alpha = d^2F^j = 0$. Se invece $\alpha = h \in C^\infty(N)$ allora, sempre usando l'esercizio 13, si ha

$$dF^*h = d(h\circ F) = \frac{\partial(h\circ F)}{\partial x^i}dx^i =$$
$$= \frac{\partial h}{\partial y^j}\circ F\cdot\frac{\partial F^j}{\partial x^i}dx^i = F^*\Big(\frac{\partial h}{\partial y^j}\Big)\cdot F^*dy^j = F^*\Big(\frac{\partial h}{\partial y^j}dy^j\Big) = F^*dh.$$

Dunque (2.24) vale questo sistema di generatori. Sfruttando il fatto che F^* è un morfismo di algebre e la proprietà (5) del differenziale esterno, è semplice verificare se la formula vale per α e β allora vale anche per $\alpha\wedge\beta$. Ciò completa la dimostrazione. □

Esercizio 20. *Sia $F : M^m \to N^n$ un'applicazione liscia e siano $(U, \varphi = (x^i))$ e $(V, \psi = (y^i))$ carte coordinate su M ed N rispettivamente tali che $F(U)\subset V$. Indichiamo $\bar F = \psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ la rappresentazione locale di F. Allora se $\omega = \sum_I a_I\, dy^I \in \Lambda^p(V)$*

$$F^*\omega = \sum_J b_J\, dx^J \tag{2.25}$$

dove

$$b_J = \sum_I a_I\frac{\partial \bar F^I}{\partial x^J} \qquad e \qquad \frac{\partial \bar F^I}{\partial x^J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar F^{i_1}}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial \bar F^{i_1}}{\partial x^{j_p}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \bar F^{i_p}}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial \bar F^{i_p}}{\partial x^{j_p}} \end{vmatrix} \tag{2.26}$$

2.4 Derivata di Lie

Sia X un campo vettoriale su M. Indichiamo con $\{\varphi_t\}$ il flusso di X. Per ogni $x_0 \in M$ esistono un $\varepsilon > 0$ ed un intorno U di x_0 tale che il flusso

$$\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon)\times U \to M \qquad (t,x)\mapsto \varphi(t,x) = \varphi_t(x)$$

sia definito. Se $\alpha\in\Lambda^p(M)$, le forme $\varphi_t^*\alpha \in \Lambda^p(U)$ sono ben definite per $|t| < \varepsilon$. Segue dall'esercizio precedente che

$$\varphi_t^*\alpha = \sum_I a_I(t,x)dx^I$$

dove le a_I sono funzioni lisce su $(-\varepsilon,\varepsilon)\times U$. Infatti restringendo U e scegliendo ε abbastanza piccolo possiamo supporre che ci sia una carta (V, x^i) tale che $\varphi((-\varepsilon,\varepsilon)\times U)\subset V$. Sia $\alpha = \sum_I a_I(x)dx^I$ la rappresentazione di α su V. Allora su U si ha

$$a_J(t,x) = \sum_I a_I(\varphi(t,x))\frac{\partial\varphi_t^I}{\partial x^J}(t,x)$$

che chiaramente è una funzione liscia tanto in x che in t. Per $|t| < \varepsilon$ (con ε dipendente da x) le forme $\big(\varphi_t^*\alpha\big)_x$ appartengono allo spazio vettoriale $\Lambda^pT_x^*M$. Come abbiamo appena visto dipendono in modo C^∞ dal tempo t. Dunque ha perfettamente senso porre la seguente definizione

$$\Big(\mathcal{L}_X\,\alpha\Big)_x := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} \big(\varphi_t^*\alpha\big)_x.$$

Ovviamente la derivata è ancora un elemento di $\Lambda^p T_x^* M$ e dipende ancora in modo C^∞ dal punto x. Pertanto $\mathcal{L}_X\,\alpha$ è una sezione liscia di $\Lambda^p T^*M$, cioè una p-forma. In questo modo abbiamo definito un operatore

$$\mathcal{L}_X : \Lambda^p(M) \to \Lambda^p(M) \qquad \mathcal{L}_X\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} \varphi_t^*\alpha$$

che viene chiamato *derivata di Lie*. Diciamo che $\mathcal{L}_X\,\alpha$ è la derivata di Lie della forma α rispetto al campo X o nella direzione del campo X.

Esercizio 21. *Se $f \in C^\infty(M) = \Lambda^0(M)$ allora $\mathcal{L}_X\,f = Xf$.*

Proposizione 33. *La derivata di Lie è una derivazione di $\Lambda^*(M)$:*

$$\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta) = (\mathcal{L}_X\,\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(\mathcal{L}_X\,\beta). \tag{2.27}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $\varphi_t^* : \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M)$ è un omomorfismo di algebre. Dunque

$$\varphi_t^*\big(\alpha\wedge\beta\big) = \varphi_t^*\alpha\wedge\varphi_t^*\beta.$$

Sfruttando la bilinearità

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big(\varphi_t^*(\alpha\wedge\beta)\big) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\varphi_t^*\alpha\Big)\wedge\varphi_t^*\beta + \varphi_t^*\alpha\wedge\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\varphi_t^*\beta\Big).$$

Per $t = 0$ si ottiene (2.27). □

La seguente formula con il differenziale esterno di de Rham.

Proposizione 34. *Se $X \in \mathcal{X}(M)$ ed $\omega \in \Lambda^k(M)$, allora*

$$\mathcal{L}_X\,\omega = \,d\iota_X\omega + \iota_X\,d\omega \tag{2.28}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $p = \deg\omega$. Se $p = 0$ $\omega = f$ è una funzione e

$$\mathcal{L}_X\,f = Xf = df(X) = \iota_X df.$$

Poiché $\iota_X f = 0$ ciò dimostra (2.28) in questo caso. Ora supponiamo $p > 0$ ed assumiamo che (2.28) valga per tutte le forme di grado $< p$. La questione è locale quindi possiamo ragionare in una carta coordinata (U, x^i). Inoltre entrambi i termini di (2.28) sono $\mathbb{R}$-lineari in ω per cui è sufficiente dimostrare la formula per forme del tipo $\omega = f dx^I$ con $f \in C^\infty(M)$. Poniamo $\beta = x^{i_1}dx^{i_2}\wedge ... \wedge dx^{i_p}$. Allora $\omega = fd\beta$ con $\beta \in \Lambda^{p-1}(M)$. Sfruttando la Prop. 33 e l'ipotesi induttiva si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\,\omega = Xf\cdot d\beta + f\,\mathcal{L}_X\,d\beta = Xf\cdot d\beta + fd\iota_X d\beta + f\iota_X d^2\beta =\\ = Xf\cdot d\beta + fd\iota_X d\beta\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} d\iota_X\omega + \iota_X d\omega = d\iota_X(fd\beta) + \iota_X(df\wedge d\beta) = \\ = d\big(f\iota_X d\beta\big) + (\iota_X df)\wedge d\beta - df\wedge(\iota_X d\beta) = \\ = df\wedge(\iota_X d\beta) + fd\iota_X d\beta + +Xf\cdot d\beta - df\wedge(\iota_X d\beta) = \\ = fd\iota_X d\beta + +Xf\cdot d\beta. \end{aligned}$$

Pertanto la (2.28) vale anche per tutte le forme di grado p. Ciò completa il passo induttivo e la dimostrazione. □

Grazie alla formula (2.28) possiamo precisare in che modo $\mathcal{L}_X$ dipenda da X. L'operazione di contrazione con ι_X è puramente algebrica (non coinvolge derivate) e quindi è C^∞-lineare: se $f\in C^\infty(M)$ allora $\iota_{fX}\omega = f\iota_X\omega$. Tuttavia il termine $d\iota_X\omega$ coinvolgerà derivate sia di ω che di X, per cui nel complesso

$$\mathcal{L}:\mathfrak{X}(M)\times\Lambda^p(M)\to\Lambda^p(M) \qquad (X,\omega)\mapsto\mathcal{L}_X\,\omega$$

è un operatore differenziale lineare del prim'ordine tanto in X che in ω. Infatti se scriviamo l'espressione in coordinate, troviamo delle derivate seconde del flusso, cioè derivate prime delle componenti di X.

Esercizio 22. *Sia (U,x^i) una carta di M e supponiamo*

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \omega = \sum_i \omega_i(x)dx^i \in \Lambda^1(M).$$

Dimostrare direttamente a partire dalla definizione senza sfruttare la (2.28) *che*

$$\mathcal{L}_X\,\omega = \Big(\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\omega_k + X^k\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\Big)dx^i.$$

Esercizio 23. *Dimostrare che per $f\in C^\infty(M)$, $X\in\mathfrak{X}(M)$ ed $\omega\in\Lambda^p(M)$ si ha*

$$\mathcal{L}_{fX}\omega = f\mathcal{L}_X\omega + df\wedge\iota_X\omega. \tag{2.29}$$

Quindi in generale $\mathcal{L}_{fX}\neq f\,\mathcal{L}_X$.

2.5 Orientazione di varietà e integrazione

Ricordiamo innanzitutto il concetto di orientazione per uno spazio vettoriale. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n>0$. Diciamo che due basi $\{e_i\}$ ed $\{f_i\}$ di V sono *compatibili* se il determinante della matrice del cambimento di base è positivo. La compatibilità è una relazione di equivalenza fra le basi di V.

Definizione 2.5.0.7. *Una* orientazione *di V è una classe di equivalenza di basi compatibili. Uno spazio* vettoriale orientato *è uno spazio vettoriale di dimensione positiva su cui è stata fissata una orientazione.*

Se $\{e_i\}$ è una base di V chiamiamo *orientazione definita da* $\{e_i\}$ la classe di equivalenza contenente la base $\{e_i\}$. Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo fissata l'orientazione definita dalla base standard $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

È evidente che esistono esattamente due orientazioni di V. Se fissiamo una orientazione, le basi che appartengono all'orientazione sono dette *basi positive*.

Esercizio 24. *Prodotto vettoriale?*

Intuitivamente una orientazione di una varietà differenziabile M è una scelta di una orientazione di T_xM per ogni $x \in M$ che varia in modo continuo con x. Questa idea si può rendere rigorosa nel modo seguente.

Se Ω_1 ed Ω_2 sono due aperti di $\mathbb{R}^n$ ed $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ è un diffeomorfismo, diciamo che f *preserva l'orientazione* se $\det Df(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega_1$. Se invece $\det Df(x) < 0$ per ogni $x \in \Omega_1$, diciamo che f *inverte l'orientazione*. Se Ω_1 ed Ω_2 sono connessi la funzione $x \mapsto \det Df(x)$ ha sempre lo stesso segno su Ω_1 dunque ogni diffeomorfismo fra Ω_1 o preserva o inverte l'orientazione.

Due carte coordinate $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ di M sono dette *compatibili* se $U \cap V = \oslash$ oppure se il cambiamento di coordinate $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ preserva l'orientazione.

Sia M una varietà differenziabile e sia $\mathfrak{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un atlante di M. Diciamo che $\mathfrak{A}$ è un *atlante orientato* se le carte di $\mathfrak{A}$ sono a due a due compatibili, cioè se per ogni $\alpha, \beta \in I$ tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \oslash$ si ha $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$ su $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Diciamo che due atlanti orientati sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante orientato. La compatibilità è una relazione di equivalenza fra gli atlanti orientati di M.

Definizione 2.5.0.8. *M è* orientabile *se esiste un atlante orientato di M. Una* orientazione *di M è una classe di equivalenza di atlanti orientati. Una* varietà orientata *è una varietà orientabile su cui è stata fissata una orientazione.*

Se $\mathfrak{A}$ è un atlante orientato su M chiamiamo *orientazione definita da* $\mathfrak{A}$ la classe di equivalenza di $\mathfrak{A}$.

Esercizio 25. *Sia $\mathfrak{A}$ un atlante orientato di una varietà M. Sia $\mathfrak{A}_{\max}$ la collezione di tutte le carte su M che sono compatibili con ogni carta appartenente ad $\mathfrak{A}$. Dimostrare le affermazioni seguenti.*

1. *$\mathfrak{A}_{\max}$ è un atlante orientato di M.*
2. *$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_{\max}$.*
3. *Se $\mathfrak{B}$ è un atlante orientato di M tale che $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}_{\max}$.*

Dunque ogni orientazione è definita da un atlante orientato massimale. Le carte che stanno nell'atlante orientato massimale sono dette carte compatibili con l'orientazione.

Esercizio 26. *Sia M è una varietà orientata e sia $x \in M$. Sia (U, φ) è una carta compatibile con l'orientazione tale che $x \in U$. L'insieme delle basi $\{v_i\}$ di T_xM tali che $D\varphi_x(v_i)$ sia una base positiva di $\mathbb{R}^n$ (provvisto dell'orientazione standard). Dimostrare che questo insieme è una orientazione di T_xM e che questa orientazione non dipende dalla scelta della carta compatibile (U, φ).*

Pertanto su una varietà orientata ogni spazio tangente è orientato.

Teorema 35. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. M è orientabile se e solo se esiste una n-forma che non si annulla mai.*

Più precisamente: se su M si fissa una orientazione, allora esiste una n-forma ω tale che per ogni $x \in M$ e per ogni base positiva $\{e_i\}$ di T_xM si ha $\omega_x(e_1, \dots, e_n) > 0$. Viceversa, se ω è una n-forma su M che non si annulla mai, allora esiste una orientazione di M caratterizzata dal fatto che per ogni $x \in M$ le basi positive di T_xM sono esattamente quelle su cui ω_x è positiva.

Dimostrazione. Supponiamo che M sia orientabile e che $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sia un atlante orientato di M. Sia $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una partizione dell'unità subordinata ad $\mathfrak{A}$. Sia $\eta = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$. Per ogni α la forma $\chi_\alpha \varphi_\alpha^* \eta \in \Lambda^n(U_\alpha)$ ha supporto compatto in U_α. Estendendola a zero fuori di U_α otteniamo una n-forma definita su tutta M. Poniamo

$$\omega = \sum_\alpha \chi_\alpha \varphi_\alpha^* \eta.$$

Poiché la somma è localmente finita ω è una n-forma su M ben definita. Vogliamo provare che ω non si annulla mai. Fissiamo $x \in M$ e sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base positiva di T_xM. L'insieme $J = \{\alpha \in I : x \in \operatorname{supp} \chi_\alpha\}$ è finito. Per ogni $\alpha \in J$, $\{D\varphi_\alpha(x)e_1, \dots, D\varphi_\alpha(x)e_n\}$ è una base positiva di $\mathbb{R}^n$, dunque

$$\eta\big(D\varphi_\alpha(x)e_1, \dots, D\varphi_\alpha(x)e_n\big) > 0$$
$$\omega(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\alpha \in J} \chi_\alpha(x) \eta\big(D\varphi_\alpha(x)e_1, \dots, D\varphi_\alpha(x)e_n\big) > 0.$$

Pertanto ω_x è positiva su ogni base positiva di T_xM e in particolare ω non si annulla mai.

Viceversa, supponiamo che esista $\omega \in \Lambda^n T^*M$ che non si annulla mai. Sia $\mathfrak{A}$ la collezione di tutte le carte $(U, x^1, \dots, x^n)$ tali che $\omega_{|U} = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ con $f > 0$ su U. Verichiamo che $\mathfrak{A}$ è un atlante orientato. Dato $p \in M$ sia $(U, x^1, \dots, x^n)$ una carta di M centrata in p con U connesso. Per definizione di n-forma esiste una funzione $f \in C^\infty(U)$ tale che $\omega_{|U} = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Poiché ω non si annulla mai, $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in U$. Siccome U è connesso, si ha $f > 0$ o $f < 0$ su tutto U. Se siamo nel primo caso $(U, x^1, \dots, x^n)$ è una carta di $\mathfrak{A}$. Se invece $f < 0$ allora $\omega_{|U} = |f| dx^2 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ dunque $(U, x^2, x^1, \dots, x^n)$ è una carta di $\mathfrak{A}$. Ciò dimostra che $\mathfrak{A}$ è un atlante. Siano (U, x^i) e (V, y^i) due carte di $\mathfrak{A}$ e sia $y = f(x)$ il cambiamento di coordinate. Allora

$$\omega = g dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = g \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Poiché sia f che $g \det J_f$ sono funzioni positive, il determinante risulta positivo. Dunque $\mathfrak{A}$ è un atlante orientato. □

Teorema 36. *Se M è connessa ed orientabile esistono esattamente due orientazioni di M.*

Dimostrazione. Date due orientazioni di M possiamo associare ad esse due n-forme ω_1 ed ω_2 come nel teorema precedente. Allora $\omega_1 = f\omega_2$ con $f \in C^\infty(M)$ mai nulla. Poiché M è connessa f è sempre positiva o sempre positiva. □

Rivestimento orientabile: Raghavan 95

2.6 Integrazione di forme differenziali

Sia M una varietà n-dimensionale orientata. Vogliamo definire un operatore di integrazione

$$\int : \Lambda^n_c(M) \to \mathbb{R}.$$

Innanzitutto definiamo l'integrale per una forma a supporto compatto in una carta. Se $(U, \varphi = (x^i))$ è una carta coordinata compatibile con l'orientazione e $\omega \in \Lambda^n_c(U)$ poniamo

$$\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(x) dx \tag{2.30}$$

dove $f \in C^\infty(U)$ è la funzione definita dalla relazione $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Supponiamo ora che $\psi = (y^i) : U \to \mathbb{R}^n$ sia un'altra carta coordinata con lo stesso dominio e compatibile con l'orientazione fissata. Sia $\omega = g dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$. Sia $h = \varphi \circ \psi^{-1}$ il cambiamento di coordinate, cioè $x = h(y)$. Sfruttando l'esercizio 14 otteniamo

$$\omega = f \cdot \det J_h \circ \psi dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \qquad g = f \cdot \det J_h \circ \psi.$$

Poiché le due carte sono compatibili $\det J_h > 0$. Dunque per la formula del cambiamento di variabile

$$\int_{\psi(U)} g \circ \psi^{-1}(y) dy = \int_{\psi(U)} f \circ \psi^{-1}(y) \big| \det J_h(y) \big| dy = \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(x) dx.$$

Pertanto se ω ha supporto compatto in una carta coordinata U il suo integrale su U, come definito nella (2.30) dipende solo da U e non dal sistema di coordinate scelto.

Se $\omega \in \Lambda_c(U)$ e $\{\chi_\alpha\})_{\alpha \in I}$ è una partizione dell'unità allora

$$\int_U \omega = \sum_{\alpha \in I} \int_U \chi_\alpha \omega. \tag{2.31}$$

Data ora una forma qualunque $\omega \in \Lambda^n_c(M)$ scegliamo un atlante orientato $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ed una partizione dell'unità $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ad esso subordinata. Poniamo

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in I} \int_{U_\alpha} \chi_\alpha \omega. \tag{2.32}$$

Osserviamo innanzitutto che il supporto di ω interseca solo un numero finito degli aperti U_α dunque la somma è finita. Inoltre $\chi_\alpha \omega$ ha supporto compatto in U_α. Dunque la (2.32) ha senso. Mostriamo ora che la scelta dell'atlante e della partizione dell'unità è irrilevante. Sia quindi $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J}$ un altro atlante orientato e sia $\{\theta_\beta\}_{\beta \in J}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{V_\beta\}_{\beta \in J}$. Per (2.31)

$$\int_{U_\alpha} \chi_\alpha \omega = \sum_{\beta \in J} \int_{U_\alpha} \chi_\alpha \theta_\beta \omega.$$

La forma $\chi_\alpha\theta_\beta\omega$ ha supporto compatto in $U_\alpha \cap V_\beta$. Per calcolare il suo integrale possiamo qualunque sistema di coordinate sull'aperto $U_\alpha \cap V_\beta$. Dunque

$$\int_{U_\alpha} \chi_\alpha\theta_\beta\omega = \int_{U_\alpha\cap V_\beta} \chi_\alpha\theta_\beta\omega = \int_{V_\beta} \chi_\alpha\theta_\beta\omega.$$

Pertanto sfruttando le proprietà delle partizioni dell'unità otteniamo

$$\sum_{\alpha\in I}\int_{U_\alpha} \chi_\alpha\omega = \sum_{\alpha\in I}\int_{U_\alpha}\Big(\sum_{\beta\in J}\theta_\beta\Big)\chi_\alpha\omega = \sum_{\alpha\in I,\beta\in J}\int_{U_\alpha\cap V_\beta}\chi_\alpha\theta_\beta\omega =$$
$$= \sum_{\beta\in J}\int_{V_\beta}\Big(\sum_{\alpha\in I}\chi_\alpha\Big)\theta_\beta\omega = \sum_{\beta\in J}\int_{V_\beta}\theta_\beta\omega.$$

Dunque la definizione (2.32) non dipende dalla scelta dell'atlante orientato e della partizione dell'unità.

2.6.1 Orientazione del bordo

Per varietà con bordo i concetti di carte compatibili, atlante orientato ed orientazione si definiscono nello stesso modo che per varietà senza bordo. Infatti date due carte di una varietà con bordo ha perfettamente senso considerare il segno dello jacobiano del cambiamento di carta. La novità è che una orientazione della varietà M induce automaticamente una orientazione del bordo.

Se M è una varietà con $\partial M \neq \oslash$ ed $x \in \partial M$ allora per definizione esiste una carta $\varphi = (x^i) : U \to \mathbb{R}^n_-$ dove $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$ e $x \in U$.

Definizione 2.6.1.1. *Sia M una varietà con bordo e $x \in \partial M$. Diciamo che un vettore $v \in T_xM$* punta verso l'interno *di M se esiste una curva $\alpha : [0,\varepsilon) \to M$ tale che $\dot\alpha(0) = v$ e $\alpha((0,\varepsilon)) \subset \mathring{M}$. Diciamo che v* punta verso l'esterno *se $-v$ punta verso l'interno.*

Esercizio 27. *Dimostrare che se esiste una curva α come sopra e $\beta : [0,\delta) \to M$ è una curva liscia tale che $\dot\beta(0) = v$ allora esiste δ' tale che $\beta(t) \in M^0$ per $t \in (0,\delta')$.*

Esercizio 28. *Dimostrare che se $v \in T_xM$ punta verso l'interno allora $T_xM = T_x\partial M \oplus \mathbb{R}v$.*

Esercizio 29. *Dimostrare che se $v \in T_xM$ è tale che $T_xM = T_x\partial M \oplus \mathbb{R}v$, allora o v o $-v$ punta verso l'interno.*

Esercizio 30. *Sia $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_-$ una carta con $x \in U \cap \partial M$. Sia*

$$v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Dimostrare che v punta verso l'interno se e solo se $v^1 < 0$.

Sia M è una varietà con $\partial M \neq \oslash$ ed $x \in \partial M$. Scegliamo una carta $\varphi = (x^i) : U \to \mathbb{R}^n_-$ con $x \in U$. Se questa carta non è compatibile con l'orientazione consideriamo la sostituzione

$$y^1 = x^1, y^2 = -x^2, y_3 = x_3, \dots y_n = x_n.$$

Allora $(U, \psi = (y^i))$ è una carta compatibile con l'orientazione e tale che $\psi(U) \subset \mathbb{R}^n_-$. Quindi il bordo è ricoperto da carte di questo tipo che sono compatibili con l'orientazione.

Teorema 37. *Sia M una varietà orientata con bordo non vuoto. Dato un atlante orientato $\mathfrak{A}$ di M poniamo $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Per ogni carta $(U, \varphi = (x^i))$ in $\mathfrak{A}$ consideriamo la restrizione $\varphi_{|U\cap\partial M} : U \cap \partial M \to H$. Allora la famiglia*

$$\mathfrak{B} = \{(U \cap \partial M, \varphi_{|U\cap\partial M}) : (U, \varphi) \in \mathfrak{A}, U \cap \partial M \neq \emptyset\}$$

è un atlante orientato di ∂M. L'orientazione così ottenuta è caratterizzata dalla seguente proprietà: dato $x \in \partial M$ sia $v_1, \ldots, v_{n-1}$ una base di $T_x\partial M$ e sia $v \in T_xM$ un vettore che punta verso l'esterno di M. Allora $\{v_i\}$ è una base positiva di $T_x\partial M$ se e solo se $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ è una base positiva di T_xM.

Dimostrazione. Abbiamo appena verificato che $\mathfrak{B}$ ricopre ∂M quindi è un atlante. Per convincersi che è un atlante orientato è sufficiente osservare che la condizione espressa nel teorema affinché una base di $T_x\partial M$ sia positiva è intrinseca perché intrinseco il concetto di vettore che punta verso l'interno. □

Quando M è una varietà con bordo non vuoto, si considera il bordo orientato come sopra. Vale la pena dire esplicitamente che se su M consideriamo una carta (U, x^i) come sopra, allora i vettori

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

formano una base positiva di T_xM, il bordo è $\partial M = \{x_1 = 0\}$ l'interno è $\mathring{M} = \{x_1 < 0\}$, il campo

$$\frac{\partial}{\partial x^1}$$

punta verso l'esterno e i vettori

$$\frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

formano una base positiva di $T_x\partial M$.

2.7 Teorema di Stokes

Lemma 38. *Se $\omega \in \Lambda_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0.$$

Dimostrazione. Sia

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\xi_i$$

con $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\xi_i = dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$.

$$d\omega = \sum_{i=1}^n df_i \wedge \xi_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x^i}(x_1, \dots, x_n) dx^1 \cdots dx^n =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x^i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx^i.$$

La funzione $f_i(x_1 \dots, \cdot, \dots, x_n)$ ha supporto compatto in $\mathbb{R}$. Se $R > 0$ è tale che il supporto sia contenuto in $[-R, R]$ allora per il Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^i, \dots, x^n) dx^i = \int_{-R}^{R} \frac{\partial f_i}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^i, \dots, x^n) dx^i =$$
$$= f_i(x^1 \dots, R, \dots, x^n) - f_i(x^1 \dots, -R, \dots, x^n) = 0$$

dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n = 0.$$

□

Il teorema seguente nella forma seguente va generalmente sotto il nome di Teorema di Stokes.

Teorema 39 (di Gauss-Green-Ostrogradski-Stokes). *Sia M una varietà n-dimensionale orientata con bordo. Se $\omega \in \Lambda_c^{n-1}(M)$ allora*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{2.33}$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ un atlante orientato e sia $\{\chi_\alpha\}$ una partizione dell'unità ad esso subordinata. Le forme $\omega_\alpha = \chi_\alpha \omega$ hanno supporto compatto in U_α e per definizione

$$\int_M d\omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} d\omega_\alpha \qquad \int_{\partial M} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial M \cap U_\alpha} \omega_\alpha.$$

Dunque è sufficiente dimostrare che se $(U, \varphi = (x^i))$ è una carta di M e $\omega \in \Lambda_c^n(U)$ allora

$$\int_U d\omega = \int_{\partial M \cap U} \omega. \tag{2.34}$$

Se $\partial M \cap U = \oslash$, allora $\varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$. In questo caso (2.34) segue immediatamente dal lemma precedente. Se invece $\partial U = \partial M \cap U \neq \oslash$, il calcolo è lievemente differente.

Le forme $\xi_i = dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$ formano una base di $\Lambda^{n-1}T_x^*M$, quindi possiamo scrivere

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i(x)\xi_i$$

con $f_i \in C^\infty(U)$. Con gli stessi conti svolti nella dimostrazione dell'ultimo lemma otteniamo

$$\int_U d\omega = \sum_i (-1)^{i-1} \int_{\varphi(U)} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n.$$

Se $i > 1$

$$\int_{\varphi(U)} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n = \int_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial f_i}{\partial x^i}(x_1, \ldots, x_n) dx^1 \cdots dx^n =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}_-} dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x^i}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) dx^i.$$

Anche in questo caso la funzione $f_i(x_1 \ldots, \cdot, \ldots, x_n)$ ha supporto compatto in $\mathbb{R}$, dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) dx^i = 0$$
$$\int_{\varphi(U)} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n = 0$$

per $i > 1$. Pertanto

$$\int_U d\omega = \int_{\varphi(U)} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} dx^1 \cdots dx^n = \int_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \cdots dx^n =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx^2 \cdots dx^n \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x^1, \ldots, x^n) dx^1.$$

Per il teorema fondmentale del calcolo integrale

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x^1, \ldots, x^n) dx^1 = f_1(0, x^2, \ldots, x^n)$$
$$\int_U d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x^2, \ldots, x^n) dx^2 \cdots dx^n.$$

D'altro canto le forme ξ_i sono indenticamente nulle su $T_x\partial M$, se $i > 1$, dunque

$$\omega_{|\partial M} = f_1(0, x^2, \ldots, x^n) dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$
$$\int_{\partial U} \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x^2, \ldots, x^n) dx^2 \cdots dx^n = \int_U d\omega.$$

□

Capitolo 3

Omologia e coomologia

3.1 Coomologia di de Rham

Sia M una varietà differenziabile n-dimensionale. Poniamo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}^0(M) &= \{0\} \subset \Lambda^0(M) \\
\mathfrak{B}^p(M) &= \mathrm{im}\{d : \Lambda^{p-1}(M) \to \Lambda^p(M)\} \subset \Lambda^p(M) \quad p > 1 \\
\mathfrak{Z}^p(M) &= \mathrm{Ker}\{d : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)\} \subset \Lambda^p(M) \quad p < n \\
\mathfrak{Z}^n(M) &= \Lambda^n(M).
\end{aligned}$$

Poiché $d^2 = 0$ si ha $\mathfrak{B}^p(M) \subset \mathfrak{Z}^p(M)$ possiamo porre

$$H^p_{dR}(M) := \frac{\mathfrak{Z}^p(M)}{\mathfrak{B}^p(M)}.$$

$H^p_{dR}(M)$ è uno spazio vettoriale reale, e viene tradizionalmente chiamato p-esimo *gruppo di de Rham*, anche se si tratta di uno spazio vettoriale. Poniamo poi

$$H^*_{dR}(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} H^p_{dR}(M).$$

Teorema 40. *Se M^n è una varietà connessa compatta e orientata, allora l'integrale di una n-forma dà un isomorfismo $H^n(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.*

Vedi LEe.

L'operazione di pull-back commuta con il differenziale esterno e pertanto passa alla coomologia. Sia $F : M \to N$ una applicazione liscia. Data $a \in H^p(N)$ rappresentiamo a mediante una forma chiusa $a = [\alpha]$, $\alpha \in \Lambda^p(N)$. Allora $dF^*\alpha = F^*d\alpha = 0$ e quindi poniamo $F^*a = [F^*\alpha]$.

Esercizio 31. *Dimostrare che la classe $[F^*\alpha]$ non dipende dalla scelta del rappresentante $\alpha \in a$, ma solo dalla classe a.*

Pertanto otteniamo una applicazione lineare $F^* : H^p(N) \to H^p(M)$ che chiamiamo ancora pull-back.

Esercizio 32. *Verificare che* $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ *e* $\mathrm{Id}_M^* = \mathrm{Id}_{H^*(M)}$.

Se M è una varietà senza bordo, $M \times [0,1]$ è una varietà com bordo. Se $(x,t) \in M \times I$ si ha $T^*_{(x,t)}(M \times [0,1]) = T^*_x M \times T^*_t[0,1]$, dunque ogni forma $\Omega \in \Lambda^p(M \times [0,1])$ si può scomporre canonicamente come

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$$

dove $\omega_1 \in \Lambda^p(M \times [0,1])$ e $\omega_2 \in \Lambda^{p-1}(M \times [0,1])$ non contengono dt.

Siano M ed N varietà senza bordo e siano $f, g : M \to N$ due applicazioni lisce. Supponiamo che esse *differenziabilmente omotope*. Ciò significa che esiste una applicazione liscia

$$F : M \times [0,1] \to N$$

tale che $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$ per ogni $x \in M$. Una tale applicazione si chiama *omotopia* fra f e g. Poniamo $f_t(x) = F(x,t)$. Data una forma $\omega \in \Lambda^n(N)$ scomponiamo come sopra la forma $F^*\omega$:

$$F^*\omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt.$$

Osserviamo che $\omega_1 \in \Lambda^p(M \times [0,1])$ e $\omega_2 \in \Lambda^{p-1}(M \times [0,1])$. Definiamo

$$H\omega := \int_0^1 \omega_2(\cdot, t) dt.$$

Localmente ω_2 è somma di termini della forma

$$a_I(x,t) dx^I$$

quindi $H\omega$ è somma di termini del tipo

$$b_I(x) dx^I \qquad b_I(x) = \int_0^1 a_I(x,t) dt.$$

Dunque $H\omega$ è una forma su M. Otteniamo così un operatore lineare

$$H : \Lambda^p(N) \to \Lambda^{p-1}(M).$$

H è detto operatore di omotopia algebrico.

Lemma 41. *Per ogni* $\omega \in \Lambda^p(N)$ *vale la formula di omotopia*

$$g^*\omega - f^*\omega = (-1)^p \big(H d\omega - dH\omega \big). \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Localmente possiamo scrivere

$$\omega_1 = \sum_J c_J(x,t)dx^J \qquad \omega_2 = \sum_I a_I(x,t)dx^I$$

$$H\omega = \sum_I b_I(x)dx^I \qquad b_I(x) = \int_0^1 a_I(x,t)dt$$

$$dH\omega = \sum_I db_I \wedge dx^I = \sum_{j,I} \frac{\partial b_I(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I$$

$$\frac{\partial b_I(x)}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \int_0^1 a_I(x,t)dt = \int_0^1 \frac{\partial a_I(x,t)}{\partial x^j} dt$$

$$dH\omega = \sum_{j,I} \Big(\int_0^1 \frac{\partial a_I(x,t)}{\partial x^j} dt \Big) dx^j \wedge dx^I.$$

Se poniamo $h(x) = (x,1)$, allora $g^*\omega = h^*F^*\omega$. Poiché $h^*dt = 0$

$$g^*\omega = h^*\omega_1 = \sum_J c_J(x,1)dx^J \qquad f^*\omega = \sum_J c_J(x,0)dx^J.$$

Poniamo $\varphi = d\omega \in \Lambda^{p+1}(N)$.

$$F^*\varphi = F^*d\omega = dF^*\omega = d\omega_1 + (d\omega_2) \wedge dt$$

$$d\omega_1 = \sum_J dc_J \wedge dx^J = \sum_J \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial c_J}{\partial x^k}(x,t)dx^k + \frac{\partial c_J}{\partial t}(x,t)dt \Big) \wedge dx^J$$
$$= \sum_{k,J} \frac{\partial c_J}{\partial x^k}(x,t)dx^k \wedge dx^J + \sum_J \frac{\partial c_J}{\partial t}(x,t)dt \wedge dx^J.$$

Posto

$$\varphi_1 := \sum_{k,J} \frac{\partial c_J}{\partial x^k}(x,t)dx^k \wedge dx^J$$

$$d\omega_1 = \varphi_1 + (-1)^p \Big(\sum_J \frac{\partial c_J}{\partial t}(x,t)dx^J \Big) \wedge dt$$

$$d\omega_2 = \sum_I da_I \wedge dx^I = \sum_I \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x^j}(x,t)dx^j + \frac{\partial a_I}{\partial t}(x,t)dt \Big) \wedge dx^I$$

$$d\omega_2 \wedge dt = \sum_{j,I} \frac{\partial a_I}{\partial x^j}(x,t)dx^j \wedge dx^I \wedge dt.$$

Sottolineiamo che (ovviamente) per gli oggetti definiti su $M \times [0,1]$ il simbolo d indica il differenziale esterno nelle $n+1$ variabili (x,t). Poniamo

$$\varphi_2 = \sum_{j,I} \frac{\partial a_I}{\partial x^j}(x,t)dx^j \wedge dx^I + (-1)^p \sum_J \frac{\partial c_J}{\partial t}(x,t)dx^J.$$

Allora

$$F^*\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \wedge dt$$

è la scomposizione di $F^*d\omega$. Dunque

$$H d\omega = \int_0^1 \varphi_2(\cdot, t)dt =$$

$$= \sum_{j,I} \Big(\int_0^1 \frac{\partial a_I}{\partial x^j}(x,t)dt \Big) dx^j \wedge dx^I + (-1)^p \sum_{k,J} \Big(c_J(x,1) - c_J(x,0) \Big) dx^J =$$

$$= dH\omega + (-1)^p(g^*\omega - f^*\omega).$$

□

Corollario 42. *Se M ed N sono varietà senza bordo e $f, g : M \to N$ sono due applicazioni lisce differenziabilmente omotope, allora i morfismi*

$$f^*,\, g^* : H^*_{dR}(N) \to H^*_{dR}(M)$$

coincidono.

Dimostrazione. Sia $a = [\omega] \in H^p_{dR}(N)$. Allora prendendo le classi in (3.1) $[g^*\omega] - [f^*\omega] = (-1)^p[-dH\omega] = 0$. □

Corollario 43. *Se M ed N sono varietà differenziabili ed $f : M \to N$ e $g : N \to M$ sono equivalenze omotopiche lisce, ossia esistono omotopie lisce $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_M$ e $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_N$, allora $H^p_{dR}(M) \cong H^p_{dR}(N)$ per ogni $p \geq 0$.*

Dimostrazione. È sufficiente osservare che

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \mathrm{Id}^*_M = \mathrm{Id}_{H^*(M)}\,.$$

Allo stesso modo $g^* \circ f^* = \mathrm{Id}_{H^*(N)}$ dunque f^* e g^* sono isomorfismi. □

Lemma 44 (di Volterra[1])**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto stellato rispetto all'origine. Se $\omega \in \Lambda^p(A)$ è chiusa, allora essa è anche esatta. In particolare $H^p_{DR}(A) = 0$ per $p > 0$.*

3.2 Omologia singolare

Sia A un insieme. Indichiamo $\mathbb{R}^A$ l'insieme delle funzioni da A in $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^A$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare punto per punto. Indichiamo con $F(A)$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^A$ dalle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ tali che l'insieme $\{a \in A : f(a) \neq 0\}$ sia finito. $F(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^A$. Dato $a \in A$ consideriamo la funzione $\delta_a : A \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = a \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

[1] Questo risultato fondamentale è universalmente noto come "lemma di Poincaré". Tuttavia è stato dimostrato per la prima volta da Vito Volterra. Cfr. la discussione in [6, p. VIII].

Se $f \in F(A)$ allora

$$f = \sum_{a \in A} f(a)\delta_a.$$

Infatti la somma è finita perché $f(a) \neq 0$ solo per un numero finito di elementi $a \in A$. Dunque $\{\delta_a\}_{a\in A}$ è una base di $F(A)$. Possiamo identificare l'elemento $a \in A$ con la funzione $\delta_a \in F(A)$. Pertanto dato $f \in F(A)$, se $\{a \in A : f(a) \neq 0\} = \{a_, \dots, a_n\}$ scriveremo semplicemente $f \in F(A)$ come una somma formale

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i a_i$$

dove $f_i = f(a_i)$.

Lemma 45. *Sia A un insieme non vuoto e V uno spazio vettoriale. Se $\varphi : A \to V$ è un'applicazione qualsiasi, esiste un'unica applicazione lineare*

$$\tilde{\varphi} : F(A) \to V$$

tale che $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(a)$ per ogni $a \in A$.

Esercizio 33. *Dimostrare il lemma.*

Per questo motivo chiamiamo $F(A)$ lo *spazio vettoriale libero* sull'insieme A. (La proprietà espressa dal lemma è la stessa che caratterizza gli oggetti “liberi” in altre categorie, per esempio i gruppi liberi e i gruppi abeliani liberi.)

Indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali con 0 incluso, $\mathbb{N} = \{i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$. Poniamo $\mathbb{R}^\infty = F(\mathbb{N})$. Poiché le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ si possono vedere come successioni di numeri reali, $\mathbb{R}^\infty$ coincide lo spazio vettoriale reale formato da tutte le successioni $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ che sono definitivamente nulle, cioè tali che $x_i \neq 0$ solo per un numero finito di indici i. Per $i \in \mathbb{N}$ sia $e_i \in \mathbb{R}^\infty$ la successione

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{i-\text{esimo}}{1}, 0, \dots).$$

$\{e_0, e_1, \dots\}$ è una base di $\mathbb{R}^N$. Su $\mathbb{R}^\infty$ consideriamo la topologia prodotto. Possiamo identificare $\mathbb{R}^{n+1}$ con il sottospazio generato da $e_0, \dots, e_n$. In altre parole

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^\infty : x_i = 0 \text{ per } i > n\}.$$

La topologia di $\mathbb{R}^{n+1}$ come sottospazio di $\mathbb{R}^\infty$ è la topologia ordinaria di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definizione 3.2.0.2. *Per $p \in \mathbb{N}$, il* simplesso p-dimensionale standard *è l'insieme*

$$\Delta_p := \Big\{\sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1\Big\}.$$

Esercizio 34. *Se E è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale, l'*inviluppo convesso *di E è l'insieme di tutti i segmenti $[p, q]$ con $p, q \in E$. Dimostrare che Δ_p è l'inviluppo convesso di $\{e_0, \dots, e_p\}$ e che Δ_p è un sottospazio compatto di $\mathbb{R}^{p+1} \subset \mathbb{R}^\infty$.*

Se V è uno spazio vettoriale qualsiasi e $v_0, \dots, v_p$ sono vettori di V indichiamo con $[v_0, \dots, v_p]$ l'applicazione

$$[v_0, \dots, v_p] : \Delta_p \to V \qquad \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i.$$

Esercizio 35. *Dimostrare che l'immagine di* $[v_0, \dots, v_p]$ *coincide con l'inviluppo convesso di* $\{v_0, \dots, v_p\}$.

Per $0 \le i \le p$ poniamo

$$F_i^p = [e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_p] : \Delta_{p-1} \to \Delta_p.$$

In altre parole

$$F_i^p(e_j) = \begin{cases} e_j & 0 \le j < i \\ e_{j+1} & i \le j \le p-1. \end{cases}$$

Esercizio 36. *Dimostrare che se* $x = (x_0, \dots, x_{p-1}, 0, \dots) \in \Delta_{p-1}$ *allora*

$$F_i^p(x) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{p-1}, 0, \dots).$$

L'applicazione F_i^p si chiama *i-esima faccia* del simplesso p-dimensionale.

Esercizio 37. *Se* $0 \le i < j \le p+1$ *allora*

$$F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{p+1}].$$

Se invece $0 \le j \le i \le p$ *allora*

$$F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, \widehat{e_{i+1}}, \dots, e_{p+1}].$$

Definizione 3.2.0.3. *Sia X uno spazio topologico. Se $p \ge 0$ un p-simplesso singolare in X è una applicazione continua da sigma* $: \Delta_p \to X$. *Indichiamo con $\mathscr{S}_p(X)$ l'insieme dei p-simplessi singolari in X e poniamo $\Delta_p(X) = F(\mathscr{S}_p(X))$. Gli elementi di $\Delta_p(X)$ sono chiamati* p-catene singolari *in X.*

Ogni p-catena singolare $c \in \Delta_p(X)$ è una somma formale

$$c = \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i$$

dove $\sigma_i : \Delta_p \to X$ sono p-simplessi singolari. Se $p < 0$ poniamo $\Delta_p(X) = \{0\}$. Definiamo ora un operatore dalle p-catene alle $(p-1)$-catene. Dato un p-simplesso singolare σ (con $p > 1$) definiamo il "bordo" di σ mediante la formula

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_i^p.$$

Poiche $\sigma \circ F_i^p : \Delta_{p-1} \to X$ è un'applicazione continua, cioè un $(p-1)$-simplesso singolare, ∂c è una $(p-1)$-catena singolare. Pertanto $\sigma \mapsto \partial\sigma$ è una applicazione da $(X)_p(X)$ a $\Delta_{p-1}(X)$. Per il lemma 45 ∂ si estende ad un unico operatore lineare

$$\partial : \Delta_p(X) \to \Delta_{p-1}(X). \tag{3.2}$$

∂ viene chiamato *operatore di bordo*. Se $p \leq 0$ definiamo ∂ come l'operatore identicamente nullo.

Lemma 46. $\partial\partial = 0$*, cioè la composizione*

$$\Delta_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial} \Delta_p \xrightarrow{\partial} \Delta_{p-1}(X)$$

è l'operatore nullo per ogni $p \in \mathbb{Z}$*.*

Dimostrazione. Poiché i simplessi formano una base di $\Delta_p(X)$ è sufficiente provare che $\partial\partial\sigma = 0$ per ogni $(p+1)$-simplesso singolare σ.

$$\begin{aligned}
\partial\partial\sigma = \partial \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j \sigma \circ F_j^{p+1} &= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j \partial\big(\sigma \circ F_j^{p+1}\big) = \\
= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p &= \sum_{j=0}^{p+1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+j}\sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p = \\
= \sum_{0 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j}\sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p &+ \sum_{0 \leq j \leq i \leq p} (-1)^{i+j}\sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p.
\end{aligned}$$

Segue dall'esercizio 37 che per $j \leq i$ $F_j^{p+1} \circ F_i^p = F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p$. Pertanto

$$\partial\partial\sigma = \sum_{0 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j}\sigma \circ F_j^{p+1} \circ F_i^p + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p} (-1)^{i+j}\sigma \circ F_{i+1}^{p+1} \circ F_j^p.$$

Sostituendo i a $i+1$ nella second somma e scambiando gl indici i e j nella prima otteniamo

$$\partial\partial\sigma = \sum_{0 \leq j < i \leq p+1} (-1)^{i+j}\sigma \circ F_i^{p+1} \circ F_j^p - \sum_{0 \leq j < i \leq p+1} (-1)^{i+j}\sigma \circ F_i^{p+1} \circ F_j^p = 0.$$

□

Poniamo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_p(X) &= \mathrm{im}\{\partial : \Delta_{p+1}(X) \to \Delta_p(X)\} \quad p > 1 \\
\mathfrak{Z}_p(X) &= \mathrm{Ker}\{\partial : \Delta_p(X) \to \Delta_{p-1}(X)\} \quad p < n \\
H_p(X) &= \frac{\mathfrak{Z}_p(X)}{\mathfrak{B}_p(X)}.
\end{aligned}$$

Gli elementi di $\mathfrak{B}_p(X)$ si chiama p-bordi (singolari) in X. Gli elementi di $\mathfrak{Z}_p(X)$ si chiama p-cicli (singolari) in X. Il quoziente $H_p(X)$ si chiama p-esimo gruppo di omologia singolare di X. Se c è un ciclo la sua classe di equivalenza in $H_p(X)$ viene indicata con $[c]$ ed è chiamata *classe di omologia*. Due cicli c_1 e c_2 hanno la stessa immagine in $H_p(X)$ se e soltanto se $c_1 - c_2$ è un bordo. In questo caso diciamo che c_1 e c_2 sono *cicli omologi*.

Qui forse ci sta bene il calcolo dell'omologia del punto [1, p.172]. (Comprende aumentazione.)

3.3 Alcune nozioni di algebra omologica

Definizione 3.3.0.4. *Uno* spazio vettoriale graduato *è uno spazio vettoriale V assieme ad una collezione di sottospazi V_i indiciati dagli interi $i \in \mathbb{Z}$ tali che*

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i.$$

Se conosciamo gli spazi V_i possiamo ovviamente ricostruire V. Pertanto possiamo definire in modo equivalente uno spazio graduato come una famiglia di spazi vettoriali $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

Definizione 3.3.0.5. *Un* complesso di catene *è uno spazio vettoriale graduato $\{C_i\}$ assieme ad una collezione di applicazioni lineari $\partial_i : C_i \to C_{i-1}$ tali che tutte le composizioni $\partial_{i-1}\partial_i : C_i \to C_{i-2}$ siano identicamente nulle. ∂ viene chiamato* operatore di bordo.

Spesso scriveremo semplicemente ∂ al posto di ∂_i, quando è chiaro su che spazio agisce l'operatore ∂.

Definizione 3.3.0.6. *L'*omologia *di un complesso di catene $C_* = (\{C_i\}, \partial)$ è lo spazio vettoriale graduato*

$$H_i(C_*) := \frac{\ker \partial : C_i \to C_{i-1}}{\operatorname{im} \partial : C_{i+1} \to C_i}$$

L'esempio fondamentale di complesso di catene è il seguente. Se X è uno spazio topologico le catene singolari $\{\Delta_i(X)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ formano uno spazio vettoriale graduato. Se indichiamo con ∂ l'operatore di bordo definito in (3.2) allora $\Delta_*(X) := (\{\Delta_i(X)\}, \partial)$ è un complesso di catene. La sua omologia coincide per definizione con l'omologia singolare di X:

$$H_i(X) := H_i(\Delta_*(X)).$$

Infatti è da questo esempio che deriva il nome "complesso di catene" dato al concetto astratto che è puramente algebrico.

Un altro complesso di catene si può costruire per ogni varietà differenziabile M. Fissiamo $p \geq 0$ e poniamo

$$H_p = \{x = (x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : x_j = 0 \text{ per } j > p, \sum_{i=0}^{p} x_i = 0\}. \tag{3.3}$$

H_p è il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^\infty$ contenente Δ_p.

Definizione 3.3.0.7. *Diciamo che un'applicazione $\sigma : \Delta_p \to M$ è* liscia *se esistono un aperto U di H_p ed una applicazione liscia $\tilde{\sigma} : U \to M$ tali che $U \supset \Delta_p$ e $\tilde{\sigma}_{|\Delta_p} = \sigma$. Un* p-simplesso singolare liscio *è un'applicazione liscia $\Delta_p \to M$.*

Una catena singolare liscia è una combinazione formale di simplessi singolari lisci. Indichiamo con $\Theta_p(X)$ lo spazio vettoriale delle catene singolari lisce. Ovviamente $\Theta_p(M) \subset \Delta_p(M)$. Per $p < 0$ poniamo $\Theta_p(M) = \{0\}$. Le applicazioni $F_j^p : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ sono lisce, dunque se $\sigma \in \Theta_p(M)$ anche $\partial\sigma \in \Theta_{p-1}(M)$. Ciò significa - per definizione - che $\Theta_*(M)$ è un *sottocomplesso* di $\Delta_*(M)$. Pertanto se M è una varietà differenziabile possiamo considerare anche l'*omologia liscia* $H_*(\Theta_*(M))$ ossia l'omologia del complesso $\Theta_*(M)$. Dimostraremo più avanti che questa in realtà coincide con l'omologia singolare, cioè $H_*(\Theta_*(M)) \cong H_*(M)$.

Definizione 3.3.0.8. *Siano $\{A_i\}$ e $\{B_i\}$ due spazi vettoriali graduati. Un morfismo di spazi vettoriali graduati è una famiglia di applicazioni lineari $f_i : A_i \to B_i$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$. Siano $A_* = (\{A_i\}, \partial)$ e $B_* = (\{B_i\}, \partial)$ due complessi di catene. Un* morfismo di complessi *$f : A_* \to B_*$ è un morfismo di spazi vettoriali graduati (dunque una famiglia di applicazioni lineari $f_i : A_i \to B_i$, $i \in \mathbb{Z}$) tale che $f_i \circ \partial = \partial \circ f_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$.*

In altre parole, se scriviamo gli operatori di bordo orizzontalmente, allora un morfismo è una collezione di applicazioni verticali con la proprietà che ogni rettangolo della "scala" risultante commuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial"] & A_{i+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & A_i \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_i"] & A_{i-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial"] & B_{i+1} \arrow[r, "\partial"] & B_i \arrow[r, "\partial"] & B_{i-1} \arrow[r, "\partial"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposizione 47. *Un morfismo di complessi $f : A_* \to B_*$ induce un morfismo (di spazi graduati) fra le rispettive omologie*

$$f_* : H_*(A_*) \to H_*(B_*) \qquad [\![c]\!] \mapsto [\![f(c)]\!].$$

Dimostrazione. Dalla condizione $\partial f_{i+1} = f_i \partial$ segue

$$f_i(\mathrm{im}\{\partial : A_{i+1} \to A_i\}) \subset \mathrm{im}\{\partial : B_{i+1} \to B_i\}$$
$$f_i(\ker\{\partial : A_i \to A_{i-1}\}) \subset \ker\{\partial : B_i \to B_{i-1}\}.$$

Dunque f_i passa ai quozienti

$$H_i(A_*) = \frac{\ker\{\partial : A_i \to A_{i-1}\}}{\mathrm{im}\{\partial : A_{i+1} \to A_i\}} \xrightarrow{(f_*)_i} \frac{\ker\{\partial : B_i \to B_{i-1}\}}{\mathrm{im}\{\partial : B_{i+1} \to B_i\}} = H_i(B_*)$$
$$(f_*)_i\, [\![c]\!] = [\![f_i(c)]\!].$$

□

Un esempio (fondamentale) di morfismo di complessi è fornito dalla seguente situazione geometrica. Siano X ed Y spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una applicazione continua. Se $\sigma : \Delta_p \to X$ è un simplesso singolare in X, la composizione $f \circ \sigma$ è un simplesso singolare in Y. L'applicazione $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ si estende per linearità ad una applicazione $\Delta_p(f) : \Delta_p(X) \to \Delta_p(Y)$ dalle catene singolari in X alle catene singolari in Y. Al variare di $p \in \mathbb{Z}$ queste applicazioni formano un morfismo di complessi

$$f_\Delta : \Delta_*(X) \to \Delta_*(Y) \qquad f_\Delta\Big(\sum_i a_i \sigma_i\Big) = \sum_i a_i f \circ \sigma_i.$$

Esercizio 38. *Verificare che si tratta effettivamente di un morfismo di complessi.*

Il morfismo indotto in omologia si indica con

$$f_* : H_p(X) \to H_p(Y) \qquad f_*([\![c]\!]) = [\![f_\Delta(c)]\!].$$

Lemma 48. *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono applicazioni continue, allora per i morfismi indotti in omologia si ha*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_*(X) \to H_*(Z)$$
$$(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{H_*(X)}\,.$$

Esercizio 39. *Dimostrare il lemma.*

La stessa costruzione si applica all'omologia liscia: se M ed N sono varietà differenziabili ed $f : M \to N$ è una applicazione liscia, allora possiamo definire nello stesso modo un morfismo di complessi

$$f_\Theta : \Theta_*(M) \to \Theta_*(N)$$

imponendo che per ogni simplesso singolare liscio $\sigma : \Delta_p \to M$ si abbia

$$f_\Theta(\sigma) = f \circ \sigma.$$

Ovviamente otteniamo anche un morfismo in omologia $f_* : H_*(\Theta_*(M)) \to H_*(\Theta_*(N))$.

Esercizio 40. *I complessi di catene formano una categoria.*

Esercizio 41. *La corrispondenza $X \mapsto \Delta_*(X)$ ed $f \in C(X, Y) \mapsto f_\Delta$ è un funtore dalla categoria degli spazi topologici e delle applicazioni continue nella categoria dei complessi di catene.*

Esercizio 42. *L'omologia è un funtore dalla categoria dei complessi di catene alla categoria degli spazi vettoriali graduati.*

Esercizio 43. *L'omologia singolare è la composizione dei due funtori Δ_* e omologia.*

Corollario 49. *Se X ed Y sono spazi omeomorfi, allora $H_*(X) \cong H_*(Y)$.*

Il lemma precedente esprime il fatto che l'omologia singolare è un funtore dalla categoria degli spazi topologici alla categoria degli spazi vettoriali graduati. Ad ogni spazio topologico X viene associato lo spazio graduato $H_*(X)$ e ad ogni applicazione continua $f : X \to Y$ viene associato il morfismo $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$. In realtà questo funtore è composizione di altri due funtori: il funtore Δ_* dagli spazi topologici agli spazi vettoriali graduati e il funtore H_* dagli spazi vettoriali graduati in sé stessi.

La nozione di complesso di catene ha una versione perfettamente analoga in cui il morfismo è di grado 1 anziché di grado -1.

Definizione 3.3.0.9. *Un* complesso di cocatene *è uno spazio vettoriale graduato $\{C^i\}$ assieme ad una collezione di applicazioni lineari $d : C^i \to C^{i+1}$ tali che tutte le composizioni $d^2 : C^i \to C^{i+2}$ siano identicamente nulle. d viene chiamato* operatore di cobordo *o* differenziale*.*

Per quanto ci riguarda l'esempio principale di complesso di cocatene è il seguente. Sia M una varietà differenziabile. Allora $\Lambda^*(M) = (\oplus_p \Lambda^p(M), d)$ è un complesso di cocatene. La sua coomologia è per definizione la coomologia di de Rham di M.

Definizione 3.3.0.10. *La* coomologia *di un complesso di cocatene $C^* = (\{C^i\}, d)$ è lo spazio vettoriale graduato*

$$H^i(C^*) := \frac{\ker d : C^i \to C^{i+1}}{\operatorname{im} d : C^{i-1} \to C^i}$$

A partire da un complesso di catene $A_* = (\{A_i\}, \partial)$ possiamo costruire un complesso di cocatene. Poniamo

$$A^i := A_i^* = \operatorname{Hom}(A_i, \mathbb{R}) \qquad \delta_i : A^i \to A^{i+1} \qquad \delta_i(\varphi) := \varphi \circ \partial_{i+1}. \tag{3.4}$$

Esercizio 44. *Verificare che $\delta^2 = 0$.*

Pertanto $A^* = (\{A^i\}, \delta)$ è un complesso di cocatene, ed è chiamato *complesso duale* di A_*. Se X è uno spazio topologico il *complesso delle cocatene singolari* in X, indicato con $\Delta^*(X)$, è il complesso duale di $\Delta_*(X)$. Poniamo

$$\Delta^p(X) = \big(\Delta_p(X)\big)^* = \operatorname{Hom}(\Delta_p(X), \mathbb{R}).$$

Gli elementi di $\Delta^p(X)$ vengono chiamati *cocatene singolari* in X. Il complesso delle cocatene singolari è pertanto dato da $\Delta^*(X) = (\{\Delta^p(X)\}, \delta)$ dove l'operatore di cobordo è definita da (3.4). La *coomologia singolare* di uno spazio topologico X è la coomologia del complesso $\Delta^*(X)$.

Lemma 50. *Siano A, B e C spazi vettoriali e siano S e T applicazioni lineari*

$$A \xrightarrow{S} B \xrightarrow{T} C$$

tali che $TS = 0$. Allora c'è un isomorfismo canonico

$$\frac{\ker S^*}{\operatorname{im} T^*} \cong \left(\frac{\ker T}{\operatorname{im} S}\right)^*.$$

Dimostrazione. Ogni funzionale $\beta \in \ker S^* \subset B^*$ si restringe a $\operatorname{Ker} T \subset B$ ed è identicamente nullo su $\operatorname{im} S$, dunque dà luogo ad una applicazione

$$\tilde{\beta} : \frac{\ker T}{\operatorname{im} S} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad [b] \mapsto \beta(b).$$

Se $\beta' = \beta + T^*\gamma$ si ha $\tilde{\beta}' = \tilde{\beta}$, dunque il funzionale $\tilde{\beta}$ dipende solo dalla classe di β in $\ker S^* / \operatorname{im} T^*$. Inoltre l'applicazione $\beta \mapsto \tilde{\beta}$ fattorizza attraverso una applicazione

$$\Phi : \frac{\ker S^*}{\operatorname{im} T^*} \to \left(\frac{\ker T}{\operatorname{im} S}\right)^*$$

definita dalla proprietà $\Phi([\beta])[b] = \beta(b)$. Vogliamo dimostrare che Φ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Cominciamo dalla iniettività. Supponiamo che $\beta \in \operatorname{Ker} S^*$ soddisfi $\Phi([\beta]) = 0$. Allora $\beta \equiv 0$ su $\ker T$ dunque β dà luogo ad un funzionale $\psi : \operatorname{im} T \cong B/\ker T \to \mathbb{R}$ tale che $\beta = \psi \circ T$. Sia $\gamma \in C^*$ una estensione qualunque di ψ. Allora $T^*\beta =$

γ per cui $[\beta] = 0$. Ciò dimostra l'iniettività. Per dimostrare la suriettività consideriamo un funzionale

$$\eta : \frac{\ker T}{\operatorname{im} S} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Possiamo trovare un funzionale $\varphi : \ker T \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(S(a)) = 0$ per ogni $a \in A$ e tale che $\eta([b]) = \varphi(b)$. Sia $\beta \in B^*$ una estensione qualsiasi di φ. Allora poiché $\operatorname{im} S \subset \ker T$

$$(S^*\beta)(a) = \beta(S(a)) = \varphi(S(a)) = 0$$

per ogni $a \in A$. Quindi $S^*\beta = 0$ e per costruzione $\Phi([\beta]) = \eta$. Dunque Φ è pure suriettiva. □

Corollario 51. *Se $C_* = (\{C_i\}, \partial)$ è un complesso di catene e $C^* = (\{C^i\}, \delta)$ è il complesso duale, allora c'è un isomorfismo canonico*

$$H^p(C^*) \cong \operatorname{Hom}(H_p(C_*), \mathbb{R}).$$

Pertanto l'omologia e la coomologia singolare contengono la stessa informazione. (Affinché il corollario appena visto sia valido è essenziale che i coefficienti vengano presi in un campo, come stiamo facendo noi sin dall'inizio. La situazione è ben diversa se si prendono i coefficienti in un anello o in un gruppo abeliano generale. In tal caso l'omologia e la coomologia non sono isomorfe.) La differenza è solo formale. È comodo introdurre anche la coomologia perché ciò rende più eleganti alcune costruzioni (p.e. il teorema di de Rham).

Esercizio 45. *Sia $\varphi : A_* \to B_*$ un morfismo di complessi e supponiamo che per ogni $p \in \mathbb{Z}$ $\varphi_* : H_p(A_*) \to H_p(B_*)$ sia un isomorfismo. Siano A^* e B^* i complessi duali e sia ${}^t\varphi : A^* \to B^*$ il morfismo trasposto. Dimostrare che anche ${}^t\varphi$ induce isomorfismi in coomologia.*

Definizione 3.3.0.11. *Siano $f, g : A_* \to B_*$ due morfismi di complessi di catene. Una* omotopia *fra f e g è una collezione di morfismi $\{H_p : A_p \to B_{p+1}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ tali che $\partial H + H\partial = f - g$. (più precisamente*

$$\partial_B H_p + H_{p-1}\partial_A = f - g$$

su A_p.) Se esiste una omotopia fra f e g diciamo che sono morfismi omotopi.

Esercizio 46. *Dimostrare che se $f, g : A_* \to B_*$ sono morfismi omotopi, allora i morfismi indotti in omologia coincidono:*

$$f_* = g_* : H_*(A_*) \to H_*(B_*).$$

Esercizio 47. *Formulare la definizione e il risultato analogo per complessi di cocatene. Confrontare con la* (3.1).

Definizione 3.3.0.12. *Siano A, B, C spazi vettoriali e $i : A \to B$ e $j : B \to C$ applicazioni lineari. In questa situazione scriviamo*

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \tag{3.5}$$

e diciamo che (3.5) *è una* successione *di spazi vettoriali. Se*

$$\cdots \to A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \to \cdots$$

è una successione di spazi vettoriali (che può essere finita o infinita sia a destra che a sinistra) diciamo che essa è esatta in A_i *se* $\operatorname{im} f_{i-1} = \ker f_i$. *Diciamo che è una* successione esatta *se è esatta in ogni punto.*

Una *successione esatta corta* è una successione esatta della forma

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0.$$

Gli zeri rappresentano lo spazio vettoriale banale $\{0\}$. Pertanto l'esattezza in A equivale al fatto che i è iniettiva, mentre l'esattezza in C equivale al fatto che j è suriettiva.

Esercizio 48. *Se la successione* $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ *è esatta, allora* $C \cong B/\operatorname{im}(i)$.

Esercizio 49. *La successione* $0 \to A \xrightarrow{i} B$ *è esatta se e solo se* i *è iniettiva.*

Esercizio 50. *La successione* $A \xrightarrow{j} B \to 0$ *è esatta se e solo se* j *è suriettiva.*

Esercizio 51. *Se la successione* $0 \to A \xrightarrow{i} B \to 0$ *è esatta allora* i *è un isomorfismo di* A *su* B.

Una successione esatta corta di complessi di catene è una successione

$$0 \to A_* \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \tag{3.6}$$

dove A_*, B_* e C_* sono complessi di catene, f e g sono morfismi di complessi e per ogni $i \in \mathbb{Z}$ si ha che f_i è iniettivo, g_i è suriettivo e $\operatorname{im} f_i = \ker g_i$. In altre parole una successione esatta corta di complessi di catene corrisponde a un diagrammone della seguente forma.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r, "\partial"] & A_{i+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & A_i \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_i"] & A_{i-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial"] & B_{i+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_{i+1}"] & B_i \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_i"] & B_{i-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial"] & C_{i+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_i \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_{i-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le righe orizzontali rappresentano i tre complessi A_*, B_* e C_*. Le righe verticali rappresentano i morfismi f_* e g_*. Per definizione la successione (3.6) è esatta se tutte le righe del diagramma sono esatte.

Definizioni corrispondenti si danno per successioni esatte di complessi di cocatene e per successioni di complessi che sono esatte solo in qualche punto.

Il teorema fondamentale sulle successioni esatte (almeno per ora) è il seguente.

Teorema 52. *Sia*

$$0 \to A_* \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0 \tag{3.7}$$

una successione esatta di complessi di catene. Per ogni $p \in \mathbb{Z}$ si può definire un operatore

$$\partial_* : H_p(C_*) \to H_{p-1}(A_*)$$

tale che la successione

$$\begin{gathered} \cdots \to H_p(A_*) \xrightarrow{i_*} H_p(B_*) \xrightarrow{j_*} H_p(C_*) \xrightarrow{\partial_*} \\ \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A_*) \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(B_*) \xrightarrow{j_*} H_{p-1}(C_*) \xrightarrow{\partial_*} \cdots \end{gathered} \tag{3.8}$$

sia esatta.

L'operatore ∂_* è chiamato *omomorfismo di connessione*, mentre la (3.8) è detta la successione esatta lunga indotta in omologia dalla successione esatta corta (3.7).

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando che l'operatore di connessione è ben definito. Scriviamo questa volta in orizzontale le successioni esatte date dai morfismi e i verticale complessi.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "i_{p+1}"] \arrow[d, "\partial"] & B_{p+1} \arrow[r, "j_{p+1}"] \arrow[d, "\partial"] & C_{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_p \arrow[r, "i_p"] \arrow[d, "\partial"] & B_p \arrow[r, "j_p"] \arrow[d, "\partial"] & C_p \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{p-1} \arrow[r, "i_{p-1}"] & B_{p-1} \arrow[r, "j_{p-1}"] & C_{p-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sia $\gamma \in H_p(C_*)$ e scegliamo $c \in C_p$ tale che $\partial c = 0$ e $\gamma = [\![c]\!]$. Poiché j_p è suriettiva esiste $b \in B_p$ tale che $j_p b = c$. $j_{p-1}\partial b = \partial c = 0$. Dunque, per l'esattezza della terza riga orizzontale, esiste $a \in A_{p-1}$ tale che $i_{p-1}(a) = \partial b$. Inoltre $i_{p-2}\partial a = \partial i_{p-1} a = \partial^2 b = 0$. Poiché i_{p-2} è iniettiva $\partial a = 0$. Pertanto possiamo considerare la classe $[\![a]\!] \in H_{p-1}(A)$ e poniamo

$$\partial_* [\![c]\!] = [\![a]\!].$$

Ovviamente dobbiamo verificare che questa è una buona definizione, cioè che la classe $[\![a]\!]$ non dipende da tutte le scelte fatte. Sia dunque $c' \in C_p$ un altro elemento tale che $\partial c' = 0$ e $[\![c']\!] = \gamma$, $b' \in B_p$ un elemento tale che $j_p b' = c'$ e $a' \in A_{p+1}$ tale che $i_{p+1}a' = \partial b'$. Poiché $[\![c]\!] = [\![c']\!]$ esiste $c'' \in C_{p+1}$ tale che $\partial c'' = c - c'$. Poiché j_{p+1} è suriettiva, esiste $b'' \in B_{p+1}$ tale che $j_{p+1}b'' = c''$ e $j_p \partial b'' = \partial j_{p+1} b'' = \partial c'' = c - c' = j_p(b - b')$, dunque $b - b' - \partial b'' = i_p a''$ per qualche $a'' \in A_p$. Infine $i_{p-1}\partial a'' = \partial i_p a'' = \partial b - \partial b' - \partial^2 b'' = i_{p-1}a - i_{p-1}a' - 0$. Poiché i_{p-1} è iniettiva concludiamo $\partial a'' = a - a'$, ossia $[\![a]\!] = [\![a']\!]$. Abbiamo dimostrato che ∂_* è ben definito.

Ora verifichiamo che la successione lunga è esatta. Cominciamo dall'esattezza in $H_p(B_*)$. Sia $\alpha = [\![a]\!] \in H_p(A_*)$ e $a \in A_p$. Allora $i_*\alpha = [\![i_p a]\!]$. Dunque $j_* i_* \alpha = [\![j_p i_p a]\!]$. Poiché $j_p i_p = 0$, $j_* i_* \alpha = 0$ e $\operatorname{im} i_* \subset \ker j_*$. Viceversa sia $\beta \in \ker j_*$ e supponiamo $\beta = [\![b]\!]$ per $b \in B_p$. Allora $[\![j_p b]\!] = j_*\beta = 0$, dunque $j_p b = \partial c'$ per $c' \in C_{p+1}$. Sia $b' \in B_{p+1}$ tale che $j_{p+1}b' = c'$. Allora $j_p(\partial b' - b) = \partial j_{p+1} b' - j_p b = \partial c' - j_p b = 0$ quindi esiste $a \in A_p$ tale che $i_p a = \partial b' - b$ e $i_*[\![a]\!] = [\![b]\!] = \beta$. Ciò prova che $\operatorname{im} i_* \supset \ker j_*$ e quindi l'esattezza in $H_p(B_*)$.

Vediamo l'esattezza in $H_p(C_*)$. Sia $\beta = [\![b]\!] \in H_p(B_*)$. Allora $j_*\beta = [\![j_p b]\!]$ e se $a \in A_{p-1}$ è tale che $i_{p-1}a = \partial b$ allora $\partial_* j_* \beta = [\![a]\!]$. D'altronde se $\beta = [\![b]\!]$ necessariamente $\partial b = 0$ dunque $a = 0$ e a maggior ragione $[\![a]\!] = 0$. Abbiamo dimostrato che $\operatorname{im} j_* \subset \ker \partial_*$. Supponiamo invece che $\gamma = [\![c]\!] \in \ker \partial_*$. Dunque esistono $b \in B_p$ e $a \in A_{p-1}$ tali che $j_p b = c$, $i_{p-1}a = \partial b$ e $[\![a]\!] = \partial_*\gamma = 0$. Pertanto $a = \partial a'$ per $a' \in A_p$ e $\partial(b - i_p a') = i_{p-1}(a - \partial a') = 0$. Se poniamo $\beta = [\![b - i_p a']\!]$ allora $j_*\beta = [\![j_p(b - i_p a)]\!] = [\![j_p b - j_p i_p a]\!] = [\![j_p b]\!] = \gamma$ perché $j_p i_p = 0$. Pertanto $\operatorname{im} j_* \supset \ker \partial_*$ e la successione lunga è esatta in $H_p(C_*)$.

Veniamo alla esattezza in $H_{p-1}(A_*)$. Data $\gamma = [\![c]\!]$, siano $b \in B_p$ e $a \in A_{p-1}$ tali che $j_p b = c$ e $i_{p-1}a = \partial b$. Allora $\partial_*\gamma = [\![a]\!]$ e $i_*\partial_*\gamma = [\![i_{p-1}a]\!] = [\![\partial b[\![= 0$, quindi $\operatorname{im} \partial_* \subset \ker i_*$.

Se invece $\alpha = [\![a]\!] \in H_{p-1}(A_*)$ è tale che $i_*\alpha = [\![i_{p-1}a]\!] = 0$ allora $i_{p-1}a = \partial b$ per qualche $b \in B_p$. Se poniamo $c = j_p b$ e $\gamma = [\![c]\!]$ si ha $\partial_*\gamma = \alpha$. Pertanto $\operatorname{im} \partial_* \supset \ker i_*$ e anche l'esattezza in $H_{p-1}(A_*)$ è provata. □

Un risultato analogo (con le frecce capovolte) vale per i complessi di cocatene e la loro coomologia.

Esercizio 52 (di pazienza)**.** *Formulare e dimostrare il risultato analogo per le successioni esatte corte di complessi di cocatene.*

3.4 Proprietà fondamentali dell'omologia singolare

In questo paragrafo dimostriamo alcune proprietà fondamentali dell'omologia singolare.

La prima proprietà è un esempio concreto della situazione astratta considerata nel paragrafo precedente.

Sia X uno spazio topologico e sia $A \subset X$ un sottospazio. In questa situazione diciamo che (X, A) è una *coppia di spazi.* I simplessi singolari in A sono ovviamente anche simplessi singolari in X, dunque c'è un'inclusione $\Delta_P(A) \subset \Delta_p(X)$. Poniamo

$$\Delta_p(X, A) := \frac{\Delta_p(X)}{\Delta_p(A)}.$$

L'operatore bordo passa al quoziente per cui otteniamo un nuovo complesso $\Delta_*(X, A)$.

Esercizio 53. *Formulare la definizione di sottocomplesso e complesso quoziente e dimostrare che $\Delta_*(A)$ è un sottocomplesso di $\Delta_*(X)$ con quoziente $\Delta_*(X, A)$.*

Definizione 3.4.0.13. *L'omologia della coppia di spazi (X, A) è l'omologia del complesso di catene $\Delta_*(X, A)$.*

Teorema 53. *Per ogni coppia di spazi (X, A) è definita una successione di operatori di connessione $\partial_* : H_p(X, A) \to H_{p-1}(A)$ tale che la seguente successione*

$$\cdots \to H_p(A) \to H_p(X) \to H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \to \cdots \tag{3.9}$$

sia esatta.

Dimostrazione. Per costruzione c'è una successione esatta corta

$$0 \to \Delta_*(A) \to \Delta_*(X) \to \Delta_*(X, A) \to 0.$$

Il teorema è pertanto una conseguenza immediata del teorema 52 applicato a questa successione di complessi. □

La successione (3.9) è chiamata la *successione esatta lunga della coppia* (X, A).

Esercizio 54. *Dimostrare che se $f : (X, A) \to (Y, B)$ è una applicazione continua il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H_p(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(B) \end{array}$$

commuta. (Suggerimento: riprendere la dimostrazione del teorema 52.)

Se (X, A) e (Y, B) sono coppie di spazi topologici, un morfismo da (X, A) a (Y, B) è una applicazione continua $f : X \to Y$ tale che $f(A) \subset B$. Se scriviamo $f : (X, A) \to (Y, B)$ intendiamo che f è un morfismo da (X, A) a (Y, B).

Se scriviamo $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ intendiamo che f e g sono morfismi di coppie e che esiste un'omotopia $H : X \times I \to Y)$ da f a g tale che $H(A \times I) \subset B$.

Teorema 54 (Invarianza omotopica dell'omologia)**.** *Se $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ allora $f_* = g_* : H_*(X, A) \to H_*(Y, B)$.*

Per la dimostrazione si rimanda alle pp. 219-223 di [1]. La dimostrazione ivi presentata comprende una discussione del *prodotto croce* e per comprenderla è sufficiente la parte della teoria sviluppata in queste note (?).

Teorema 55 (Eccisione)**.** *Sia (X, A) una coppia di spazi e sia $U \subset X$ un aperto tale che $\overline{U} \subset \mathring{A}$. Sia $k : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ l'inclusione. Allora*

$$k_* : H_*(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A).$$

Per la dimostrazione si rimanda alle pp. 223-228 di [1]. Per comprenderla è sufficiente la parte della teoria sviluppata in queste note (?).

3.5 La successione di Mayer-Vietoris

Teorema 56 (Mayer-Vietoris per l'omologia singolare)**.** *Siano $A, B \subset X$ due sottospazi tali che $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Siano $i^A : A \cap B \hookrightarrow A$, $i^B : A \cap B \hookrightarrow B$, $j^A : A \hookrightarrow X$ e $j^B : B \hookrightarrow X$ le inclusioni. Allora la successione*

$$\begin{aligned}\cdots \to & H_p(A \cap B) \xrightarrow{i^A_* \oplus i^B_*} H_p(A) \oplus H_p(B) \xrightarrow{j^A_* - j^B_*} H_p(A \cup B) \\ \to & H_{p-1}(A \cap B) \to \cdots\end{aligned} \tag{3.10}$$

è esatta.

La (3.10) è la successione di Mayer-Vietoris per la omologia singolare. Per la dimostrazione vedi [1, p. 228-229].

Teorema 57 (Mayer-Vietoris per la coomologia singolare)**.** *Siano $A, B \subset X$ due sottospazi tali che $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Siano $i_A : A \cap B \hookrightarrow A$, $i_B : A \cap B \hookrightarrow B$, $j_A : A \hookrightarrow X$ e $j_B : B \hookrightarrow X$ le inclusioni. Allora la successione*

$$\begin{aligned}\cdots \to & H^p(A \cup B) \xrightarrow{j^*_A - j^*_B} H^p(A) \oplus H^p(B) \xrightarrow{i^*_A + i^*_B} H^p(A \cap B) \\ \to & H^{p+1}(A \cup B) \to \cdots\end{aligned} \tag{3.11}$$

è esatta.

La (3.12) è la successione di Mayer-Vietoris per la coomologia singolare. Per la dimostrazione vedi [1, p. 285-286].

Infine dimostriamo la successione di Mayer-Vietoris per la coomologia di de Rham.

Esercizio 55. *Sia M una varietà differenziabile ed $A, B \subset M$ due aperti. Se $E \to M$ è un fibrato vettoriale ed $s_A \in \Gamma(A, E)$, $s_B \in \Gamma(B, E)$ sono tali che $s_A(x) = s_B(x)$ per ogni $x \in A \cap B$, allora la sezione s definita da*

$$s(x) = \begin{cases} s_A(x) & x \in A \\ s_B(x) & x \in B \end{cases}$$

è C^∞, dunque $s \in \Gamma(A \cap B, E)$.

Teorema 58 (Mayer-Vietoris per la coomologia di de Rham)**.** *Sia M una varietà differenziabile e siano $A, B \subset M$ due aperti tali che $M = A \cup B$. Consideriamo le inclusioni $i_A : A \cap B \hookrightarrow A$, $i_B : A \cap B \hookrightarrow B$, $j_A : A \hookrightarrow M$ e $j_B : B \hookrightarrow M$. Allora la successione*

$$\begin{aligned}\cdots \to & H^p_{dR}(A \cup B) \xrightarrow{j^*_A - j^*_B} H^p_{dR}(A) \oplus H^p_{dR}(B) \xrightarrow{i^*_A + i^*_B} H^p_{dR}(A \cap B) \\ \to & H^{p+1}_{dR}(A \cup B) \to \cdots\end{aligned} \tag{3.12}$$

è esatta.

Dimostrazione. Definiamo le applicazioni

$$\begin{aligned} j^*_A - j^*_B : \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^*(A) \oplus \Lambda^*(B) \qquad & \omega \longmapsto (j^*_A\omega, -j^*_B\omega) \\ i^*_A + i^*_B : \Lambda^*(A) \oplus \Lambda^*(B) \longrightarrow \Lambda^*(A \cap B) \qquad & (\alpha, \beta) \mapsto i^*_A\alpha + i^*_B\beta. \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che la successione esatta corta di complessi di cocatene

$$0 \to \Lambda^*(M) \xrightarrow{j_A^* - j_B^*} \Lambda^*(A) \oplus \Lambda^*(B) \xrightarrow{i_A^* + i_B^*} \Lambda^*(A \cap B) \to 0 \tag{3.13}$$

è esatta. Da questo seguirà immediatamente l'enunciato applicando il teorema 52. Incominciamo dimostrando che $j_A^* - j_B^*$ è iniettiva. Questo segue semplicemente dal fatto che $A \cup B = M$: se $j_A^*\omega = 0$ e $j_B^*\omega = 0$ allora ω si annnulla su tutta M. Verifichiamo ora che (3.13) è un complesso, ossia $(i_A^* + i_B^*)(j_A^* - j_B^*) = 0$. Sia $\omega \in \Lambda^p(M)$.

$$(i_A^* + i_B^*)(j_A^* - j_B^*)\omega = (i_A^* + i_B^*)(j_A^*\omega, -j_B^*\omega) = i_A^* j_A^*\omega - i_B^* j_B^*\omega.$$

Ma $j_A i_A = j_B i_B = k$ dove $k : A \cap B \hookrightarrow M$ è l'inclusione. Dunque $i_A^* j_A^* \omega = i_B^* j_B^* \omega = k^*\omega$ e $(i_A^* + i_B^*)(j_A^* - j_B^*) = 0$ cioè $\ker(i_A^* + i_B^*) \supset \operatorname{im}(j_A^* - j_B^*)$. Proviamo ora che $\ker(i_A^* + i_B^*) \subset \operatorname{im}(j_A^* - j_B^*)$. Se $(\alpha, \beta) \in \ker(i_A^* + i_B^*)$ allora $i_A^*\alpha = i_B^*(-\beta)$. Dunque la forma

$$\omega = \begin{cases} \alpha & \text{su } A \\ -\beta & \text{su } B \end{cases}$$

è ben definita e C^∞. E ovviamente $j_A^*\omega = \alpha, j_B^*\omega = -\beta$ dunque $(j_A^* - j_B^*)\omega = (\alpha, \beta)$. Pertanto $\ker(i_A^* + i_B^*) = \operatorname{im}(j_A^* - j_B^*)$. Resta da provare che $i_A^* + i_B^*$ è suriettiva. Sia (ψ, φ) una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{A, B\}$. Ciò significa che $\varphi = 1 - \psi$, $\psi \geq 0$, $\psi = 0$ su $M \setminus A$ e $\psi = 1$ su $M \setminus B$. Data $\gamma \in est^p(A \cap B)$ poniamo

$$\beta = \begin{cases} \psi\gamma & \text{su } A \cap B \\ 0 & \text{su } B \setminus \operatorname{supp}\psi. \end{cases}$$

Entrambi gli insiemi $A \cap B$ e $B \setminus \operatorname{supp}\psi$ sono aperti e per costruzione le due definizioni coincidono nell'intersezione $A \cap B \setminus \operatorname{supp}\psi$. Dunque β è ben definita e C^∞. Allo stesso modo poniamo

$$\alpha = \begin{cases} (1 - \psi)\gamma & \text{su } A \cap B \\ 0 & \text{su } A \setminus \operatorname{supp}(1 - \psi). \end{cases}$$

Allora $(\alpha, \beta) \in \Lambda^p(A) \oplus \Lambda^p(B)$ e

$$(i_A^* + i_B^*)(\alpha, \beta) = i_A^*\alpha + i_B^*\beta = \psi\gamma + (1 - \psi)\gamma.$$

Ciò dimostra che $i_A^* + i_B^*$ è suriettiva e conclude la dimostrazione. □

3.6 Il teorema di de Rham

Cominciamo definendo l'integrale di un p-forma su un p-simplesso singolare liscio.

Sia M una varietà differenziabile. Per definire i simplessi lisci abbiamo considerao Δ_p come sottoinsieme dello spazio affine H_p, vedi (3.3). Per definire l'integrazione di una p-forma su un p-simplesso liscio è conveniente introdurre una parametrizzazione del p-simplesso standard.

Poniamo

$$\widetilde{\Delta}_p = \{(t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p : t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} t_i \leq 1\}$$

$$f_p : \mathbb{R}^p \to H_p \qquad f_p(t_1, \dots, x_p) = \Big(1 - \sum_{i=1}^{p} t_i, t_1, \dots, t_p\Big).$$

f_p è un isomorfismo affine di $\mathbb{R}^p$ su H_p che manda $\widetilde{\Delta}_p$ su Δ_p. Possiamo riformula la definizione 3.3.0.7 nel modo seguente: una applicazione $\sigma : \Delta_p \to M$ è un simplesso singolare liscio se esiste un intorno aperto di $\widetilde{\Delta}_p$ in $\mathbb{R}^p$ tale che $\sigma \circ f_p$ si estenda ad una applicazione liscia di U in M.

Definiamo delle applicazioni $\varepsilon_i : \widetilde{\Delta}_{p-1} \to \widetilde{\Delta}_p$ mediante le formule

$$\varepsilon_0(s_1, \dots, s_{p-1}) = (1 - \sum_{i=1}^{p-1} s_i, s_1, \dots, s_{p-1})$$

$$\varepsilon_i(s_1, \dots, s_{p-1}) = (s_1, \dots, s_{i-1}, 0, s_i, \dots, s_{p-1}) \qquad i = 1, \dots, p.$$

Esercizio 56. *Dimostrare che per ogni i* $0 \leq i \leq p-1$ *si ha*

$$F_i^p \circ f_{p-1} = f_p \circ \varepsilon_i. \tag{3.14}$$

(Suggerimento: sfruttare l'esercizio 36.)

Esercizio 57. *Dimostrare che*

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^* dt_1 &= -\sum_{i=1}^{p-1} ds_i \\ \varepsilon_0^* dt_j &= ds_{j-1} \;\; j > 1 \end{aligned} \qquad \varepsilon_k^* dt_j = \begin{cases} ds_j & j < k \\ 0 & j = k \\ ds_{j-1} & j > k \end{cases} \qquad k > 0. \tag{3.15}$$

Se $\omega \in \Lambda^p(M)$ poniamo

$$\int_\sigma \omega := \int_{\widetilde{\Delta}_p} (\sigma \circ f_p)^* \omega.$$

Poiché $\widetilde{\Delta}$ è un sottoinsieme compatto di U l'integrale è ben definito ed evidentemente non dipende dalla estensione di $\sigma \circ f_p$. A questo punto possiamo estendere la definizione per linearità ed otteniamo una applicazione

$$\Lambda^p(M) \times \Theta_p(M) \to \mathbb{R} \qquad (\omega, c = \sum_i \lambda_i \sigma_i) \mapsto \int_c \omega := \sum_i \lambda_i \int_{\sigma_i} \omega. \tag{3.16}$$

Teorema 59 (di Stokes per le catene singolari)**.** *Sia* $c \in \Theta_p(M)$ *una p-catena liscia in M e sia* ω *una* $(p-1)$*-forma. Allora*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \tag{3.17}$$

Dimostrazione. Per linearità possiamo limitarci al caso in cui c si riduce ad un simplesso singolare liscio σ. Indichiamo con $\tau : V \to M$ una estensione liscia di $\sigma \circ f_p : \widetilde{\Delta}_p \to M$ ad un aperto $V \supset \widetilde{\Delta}_p$. Allora $\tau^*\omega$ è una $(p-1)$-forma su V e V è un aperto di $\mathbb{R}^p$ dunque possiamo scrivere

$$\tau^*\omega = \sum_{i=1}^{p} a_i(t) dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_p.$$

Sempre per la linearità della equazione da dimostrare possiamo supporre che ci sia un solo addendo non nullo: $\tau^*\omega = a_i(t)dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_p$. Infine permutando le coordinate possiamo ricondurci al caso un cui

$$\tau^*\omega = a(t)dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_p.$$

Allora

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\widetilde{\Delta}_p} \tau^* d\omega = \int_{\widetilde{\Delta}_p} d\tau^*\omega = \int_{\widetilde{\Delta}_p} \frac{\partial a}{\partial t_1}(t) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p = \\ = \int_{\widetilde{\Delta}_p} \frac{\partial a}{\partial t_1}(t) dt_1 \cdots dt_p$$

Invece

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\sigma \circ F_i^p} \omega = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\widetilde{\Delta}_{p-1}} (\sigma \circ F_i^p \circ f_{p-1})^*\omega.$$

Per la formula (3.14) $\sigma \circ F_i^p \circ f_{p-1} = \sigma \circ f_p \circ \varepsilon_i = \tau \circ \varepsilon_i$ dunque

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\widetilde{\Delta}_{p-1}} \varepsilon_i^* \tau^* \omega.$$

Dall'esercizio 57 segue che

$$\varepsilon^0(dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_p) = \varepsilon_1^*(dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_p) = ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_{p-1} \\ \varepsilon_k^*(dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_p) = 0 \quad \text{per } k > 1.$$

Dunque

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\widetilde{\Delta}_{p-1}} a\Big(1 - \sum_{i=1}^{p-1} s_i, s_1, \ldots, s_{p-1}\Big) ds - \int_{\widetilde{\Delta}_{p-1}} a(0, s_1, \ldots, s_{p-1}) ds.$$

Poniamo

$$g : \widetilde{\Delta}_{p-1} \to \mathbb{R} \qquad g(s) = 1 - \sum_{i=1}^{p-1} s_i$$

e osserviamo che

$$\widetilde{\Delta}_p = \{(y, s) \in \mathbb{R} \times \widetilde{\Delta}_{p-1} : 0 \le y \le g(s)\}.$$

Pertanto

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\widetilde{\Delta}_p} \frac{\partial a}{\partial t_1}(t)dt_1 \cdots dt_p = \int_{\widetilde{\Delta}_{p-1}} \left[\int_0^{g(s)} \frac{\partial a}{\partial y}(y,s)dy\right] ds =$$
$$= \int_{\widetilde{\Delta}_{p-1}} \Big[a(g(s),s) - a(0,s)\Big] ds =$$
$$= \int_{\widetilde{\Delta}_{p-1}} a\Big(1 - \sum_{i=1}^{p-1}, s\Big) ds - \int_{\widetilde{\Delta}_{p-1}} a(0,s)ds = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

□

Corollario: l'applicazione (3.16) passa in coomologia.

Teorema 60 (di de Rham)**.** *L'applicazione indotta in coomologia è un isomorfismo.*

Teorema 61. *Per ogni varietà differenziabile M l'inclusione $\Theta_*(M) \hookrightarrow \Delta_*(M)$ dà un isomorfismo in omologia. Lo stesso vale per l'applicazione duale $\Delta^*(M) \to \Theta^*(M)$. In altre parole la (co)omologia singolare liscia coindice con la (co)omologia singolare.*

La dimostrazione del teorema di questi due risultati si trova in [1, pp.289-291].
Esistenza di buoni ricoprimenti: intorni convessi alla Whitehead
Se M è connessa $H^0_{DR}(M) = \mathbb{R}$.

Esercizio 58. *Calcolare i gruppi di omologia di S^1.*

Esercizio 59. *Se $M = \mathbb{R}$ allora ogni 1-forma è esatta.*

Esistenza di funzioni di Morse: Hirsch usa la trasversalità per i getti.
Il prodotto in coomologa di de Rham

Capitolo 4

Geometria Riemanniana

4.1 Varietà Riemanniane

4.1.1 Definizioni

La geometria Euclidea si occupa non solo degli oggetti, ma specialmente della loro misura e della loro forma. L'introduzione delle metriche riemanniane permette di estendere tali concetti alla geometria delle varietà. Il teorema Egregium di Gauss mette in luce, nel caso delle superficie il profondo legame tra metrica, derivata covariante e curvatura.

Una varietà Riemanniana di classe $\mathscr{C}^k$ è una coppia (M, g) dove M è una varietà di classe $\mathscr{C}^{k+1}$ e g, detta metrica riemanniana, è una sezione $\mathscr{C}^k$ di $Sym^2(T^*_M)$, cioè un tensore simetrico di tipo $(0, 2)$, tale che per ogni punto p di M, g_p è definita positiva. La metrica definisce allora un prodotto scalare su $T_{M,p}$. Noi studieremo principalmente le varietà di classe $\mathscr{C}^\infty$

Definizione 4.1.1.1. *Due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) sono* **isometriche** *se esiste un diffeomorfismo $F : M \to N$ tale che per ogni punto p di M e per ogni coppia di vettori $v, w \in T_{M,p}$*

$$h_{(p)}(DF_p(v), DF_p(v)) = g_p(v, w) \tag{4.1}$$

Notazione Quando M, g è fissata e useremo spesso, quando questo non crei confusione, le seguenti semplificazioni nelle notazioni

$$g_p(v, w) = (v, w)_p = (v, w) \quad v, w \in T_{M,p}$$

inoltre porremo

$$||v|| = ||v||_p = \sqrt{g_p(v, v)}.$$

Infine quando X e Y sono campi vettoriali allora

$$(X, Y) = (X, Y)_p = g_p(X_p, Y_p) \quad e \quad ||X|| = ||X||_p = \sqrt{g_p(X_p, X_p)}$$

indicheranno le corrispondenti funzioni. Notiamo che la metrica g definisce per ogni $p \in M$ un isomorfismo $L : T_{M,p} \to T^*_{M,p}$

$$L(v)(w) = (v, w)$$

Allora g definisce un diffeomorfismo

$$L_g : T_M \to T_M^*$$

di fibrati: in particolare g definisce un isomorfismo tra lo spazio dei campi vettoriali e quello delle uno forme. Se $\omega \in \Lambda(M)$ il campo associato X_ω in dualità si definisce come l'unico campo tale che $\forall v \in T_{M,p}$

$$\omega_p(v) = (X_\omega, v)$$

Come esempio riportiamo la definizione di gradiente.

Definizione 4.1.1.2. *Sia M, g una varietà riemanniana di classe $\mathscr{C}^1$, e sia $f \in \mathscr{C}^1(M)$. Il gradiente (riemanniano) di f è il campo associato dalla metriche alla forma df*

$$\mathrm{grad} f = X_{df}.$$

Cioè per ogni campo Z

$$(\mathrm{grad} f, Z) = df(Z) = Z(f)$$

Molte tecniche utilizzate negli spazi euclidei si estendono ai campi vettoriali, in particolare il processo Gram-Schmidt. Se $(X_1, \dots, X_m)$ sono un sistema di campi vettoriali $\mathscr{C}^k$, tali che $(X_{1,p}, \dots, X_{m,p})$ siano una base per $T_{M,p}$ $p \in U$, U aperto di M. Utilizzando passo-passo il processo Gram-Schmidt, possiamo trovare dei campi E_i di classe $\mathscr{C}^k(U)$ tali che $g_p(E_i, E_i) = 1$ e $g_p(E_i, E_j) = 0$ se $i \neq j$, tali che $< (X_{1,p}, \dots, X_{s,p} >=< E_{1,p}, \dots, E_{s,p} >$. Rispetto ad una base E_i ortonormale del tangente le coordinate di X si calcolano utilizzando il prodottto scalare:

$$X = \sum_i (X, E_i) E_i.$$

4.1.2 Esempi di Varietà Riemanniane

In questa sezione daremo esempi di varietà Riemanniane. In particolare vedremo che ogni varietà che soddisfa il secondo assioma di numerabilità ammette una metrica Riemanniana.

1. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$. Sia $Sym^2(\mathbb{R}^m)$ lo spazio delle matrici simmetriche di ordine m, $P \subset Sym^2(\mathbb{R}^m)$ il sottoinsieme delle matrici definite positive, P è aperto in $Sym^2\mathbb{R}^m$. Le metriche riemanniana g, di classe $\mathscr{C}^\infty$, sono in corrispondenza con le applicazioni (lisce) $g \in \mathscr{C}^\infty(A, P)$. La metrica euclidea standard è associata alla funzione costante $g_p = I$, I matrice identità.

2. Siano (M, g) e (N, h) varietà riemanniane allora $(M \times N, g \times h)$ è una varietà riemanniana

3. Sia (M, g) una varietà riemanniana $f : N \to M$ una applicazione tale che Df è iniettiva allora possiamo costruire f^*g se poniamo infatti per $q \in N$:

$$(f^*g)_q(v, w)_q = g_{f(p}(Df(v), Df(w))$$

4. Caso particolare del precedente $N \subset M$ sottovarietà di M.

5. Sia M una varietà, $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di M, $M = \cup U_i$. Sia $\{\rho_i\}_{i\in I}$ una partizione dell'unità subordinata ad U_i Supponiamo che g_i sia una metrica definita su U_i, allora $\rho_i g_i$ è definito su tutto M :
$$g(v,w) = \sum_i \rho_i g_i$$
definisce una metrica su M.

6. Ogni varietà avente il secondo assioma di numerabilità ammette una metrica Riemanniana. Prendiamo un ricoprimento coordinato $\{U_i, \varphi_i\}$, costruiamo una partizione dell'unità subordinata $\{\rho_i\}$. Costruiamo una metrica g_i su $\varphi_i(U_i)$ (per esempio quella standard). Usando $D\varphi_i^{-1}$ cotruiamo metriche $h_i = (\varphi_i^{-1})^* g_i$ su U_i. Allora
$$G = \sum_i \rho_i h_i$$
è una metrica su M.

7. Supponiamo ora di avere un gruppo di isometrie G che agisce su (M, g) in modo discontinuo e senza punti fissi; allora possimo costruire sul quoziente $N = M/G$ una metrica h. Se $F : M \to N$ è la mappa quoziente allora DF_p è invertibile, quindi fissato $q \in N$, per ogni $p \in M$ tale che $F(p) = q$
$$h_q(v,w) = g_p(DF_p^{-1}v, DF_p^{-1}v).$$
La definizione data non dipende dal punto p.

8. Come casi particolari del punto precedente possiamo considerare $\mathbb{Z}^m$ che agisce su $\mathbb{R}^m$ per traslazione. Rispetto alla metrica euclidea le traslazioni sono isometrie. Questo induce una metrica sul toro $T = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$. Analogamente $S(v) = -v$ è una isometria di $\mathbb{R}^n$. Questa ha un punto in fisso nell'origine. Se prendiamo su S^n la metrica indotta da quella euclidea, S è una isometria senza punti fissi. Questo induce una sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ una struttura riemanniana.

4.1.3 Connessione di Levi Civita

In questa sezione vogliamo provare il cosidetto teorema fondamentale della geometria Riemanniana, e cioè il fatto che la ad ogni varietà riemanniana risulta associata univocamente una connessione, la connessione di Levi-Civita. La dimostrazione di tale teorema non è difficile, la difficoltà maggiore è stata quella di introdurre la connessione e travare il giusto enunciato. L'importanza storica, del lavoro di Levi Civita è connessa alla teoria della relatività generale, dove la forma simmetrica è non degenere, ma non è definita positiva.

Per semplicità supporremo i nostri oggetti di classe $\mathscr{C}^\infty$.

Sia (M, g) una varietà riemanniana $\mathscr{C}^\infty$, e ∇ una connessione allora possiamo definire $\nabla g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$:
$$\nabla g(X,Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

Lemma 62. *La funzione ∇g è un tensore di tipo* $(0,3)$.

Dimostrazione. Usiamo 18 vediamo che $\nabla g(fX, Y, Z) = f\nabla g(X, Y, Z)$ Ora

$$\nabla g(X, fY, Z) = fXg(Y, Z) + X(f)g(Y, Z) - g(\nabla_X fY, Z) - fg(\nabla_X Y, Z) -$$

$$g(fY, \nabla_X Z) = f\nabla g(X, Y, Z).$$

□

Definizione 4.1.3.1. *Sia M, g una varietà riemanniana $\mathscr{C}^\infty$. Diremo che una connessione ∇ è compatibile con la metrica $\nabla g = 0$ cioè per ogni X, Y, Z campi vettoriali su X*

$$X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z).$$

Diremo che ∇ è priva di torsione se il suo tensore di torsione $T_\nabla = 0$ è nullo:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Teorema 4.1.3.2. *Sia M, g una varietà riemanniana $\mathscr{C}^\infty$, allora esiste unica una connessione priva di torsione e compatibile con la metrica g.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'unicità. Supponiamo ∇ compatibile con la metrica e priva di torsione. Allora dati $X, Y e Z$ in $\mathcal{X}(M)$ abbiamo:

$$X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$$

$$Y(X, Z) = (\nabla_Y X, Z) + (X, \nabla_Y Z) = (\nabla_X Y, Z) = ([X, Y], Z) + (X, \nabla_Y Z)$$

$$Z(X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y) =$$

$$= (\nabla_X Z, Y) + (X, \nabla_Y Z) + ([X, Z], Y) + (X, [Y, Z]).$$

Sommando le prime due equazioni e sottraendo la terza abbiamo

$$2(\nabla_X Y, Z) = \tag{4.2}$$

$$X(Y, Z) + Y(X, Z) - Z(X, Y) + ([X, Y], Z) - ([Y, Z], X) - ([X, Z], Y).$$

Ne segue che $\nabla_X Y$ è fissato e questo dimostra l'unicità.

Per l'esistenza si può utilizzare la formula 4.2 per definire $\nabla_X Y$. Può essere conveniente fissare una base ortonormale E_i di campi definiti in un intorno aperto U. Scriviamo

$$[E_i, E_j] = \sum_k a_{i,j}^k E_k.$$

Posto

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k b_{i,j}^k E_k,$$

e utilizzando 4.2 deve essere

$$b_{i,j}^k = \frac{1}{2}(a_{i,j}^k - a_{j,k}^i - a_{i,k}^j) \tag{4.3}$$

Definiamo la connessione su U ∇' che ha come costanti di struttura le $b^k_{i,j}$. definite in 4.3. Per costruzione $T_{\nabla'}(E_i, E_j) = 0$ e $\nabla' g(E_i, E_j, E_k) = 0$. La natura tensoriale di tali oggetti mostra che $\nabla'(g) = 0$ e $T_{\nabla'} = 0$. Ne segue per l'unicità che ∇' é,, la connessione di Levi Civita rispetto alla restrizione di g a U. Possiamo trovare allora un ricoprimento U_i di M e delle connessioni ∇_i di Levi Civita per $g_{|U_i}$. Ancora per l'unicità abbiamo $\nabla_i = \nabla_j$ su $U_i \cap U_j$. Allora le ∇_i si incollano e definiscono la connessione di Levi Civita ∇. □

Durante la dimostrazione del teorema abbiamo visto che la connessione si esprime in modo ragionevole utilizzando basi ortonormali Analogamente possiamo calcolare i simboli di Christoffel della connessione di Levi Civita in coordinate. Sia $\{U, \varphi\}$ un aperto coordinato siano gli X_i i pull-back di $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Poniamo $g_{i,j} = (X_i, X_j)$ allora $G = (g_{i,j})$ è la matrice che rappresenta la metrica g sia $G^{-1} = (g^{i,j})$ l'inversa della G. Poniamo

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{i,j} X_k$$

Dato che $[X_i, X_j] = 0$ abbiamo

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i$$

Quindi $\Gamma^k_{i,j} = \Gamma^k_{j,i}$. Sostituendo $[X_i, X_j] = 0$ nella 4.2 abbiamo

$$2(\nabla_{X_i} X_j, X_k) = 2\sum_s \Gamma^s_{i,j} g_{sk} = (g_{jk})_{x_i} + (g_{ik})_{x_j} + (g_{ij})_{x_k}$$

Ricordiamo tali formule nella seguente:

Proposizione 4.1.3.3. *1. Sia $\{U, \varphi\}$ un aperto coordinato siano gli X_i i pull-back di $\frac{\partial}{\partial x_i}$ Posto $g_{i,j} = (X_i, X_j)$ allora:*

$$\Gamma^s_{i,j} = \frac{1}{2} \sum g^{sk}((g_{jk})_{x_i} + (g_{ik})_{x_j} + (g_{ij})_{x_k})$$

2. Sia E_i una base ortonormale, se $\nabla_{E_i} E_j = \sum_k b^k_{i,j} E_k$ e $[E_i, E_j] = \sum_k a^k_{i,j} E_k$ allora:

$$b^k_{i,j} = \frac{1}{2}(a^k_{i,j} - a^i_{j,k} - a^j_{i,k})$$

Nota 4.1.3.4. *Notiamo che in tutte le precedenti considerazioni, con l'eccezione del processo di ortogonalizzazione, non si è mai utilizzato completamente che la g sia definita positiva. Con piccoli aggiustamenti nella dimostrazione si vede il teorema di Levi Civita vale per forme $b(.,.)$ non degenere in ogni punto di M. Di notevole importanza il caso dello spazio-tempo, importante la correzione di Levi-Civita al lavoro di Einstein sulla relatività generale.*

Esercizi 4.1.3.5. *Sia ∇ la connessione standard su $\mathbb{R}^m$ Si considerino i campi in $\mathbb{R}^m$*

$$F_{i,j} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$E_{i,j} = F_{i,j} - F_{j,i}$$

e

$$I = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

1. *Si calcoli il flusso di tali campi.*
2. *Verificare lo spazio generato dagli $E_{i,j}$ definisce una distribuzione integrabile in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$*
3. *Si verifichi $\nabla_{F_{ij}} F_{s,k} = 0 se\ j \neq s$ e $\nabla_{F_{ij}} F_{j,k} = F_{i,k}$.*
4. *Interpretiamo il campo $A = \sum_{i,j} a_{ij} F_{i,j}$ come una matrice $A = (a_{i,j})$. Se $B = (b_{i,j})$ si calcoli $\nabla_A B$ (risultato AB).*
5. *Si calcoli $[A, B]$ (risultato $AB - BA$)*
6. *Si calcoli $\nabla_{E_{ij}} E_{s,k}$*
7. *Si costruiscano tutti X i campi che commutano con i $F_{i,j}$.*

Come ogni connessione lineare (vedere 1.21) la connessione di Levi Civita definisce una derivazione per i campi tangenti lungo una funzione liscia. Vogliamo tradurre le proprietà di compatibilità rispetto alla metrica e quella di essere senza torsione. Per questo sia M, g una varietà riemanniana, $\mathscr{C}^\infty$, e ∇ la sua connessione di Levi Civita. Sia $f : N \to M$ una funzione lisca. Sia $\mathcal{X}_f(M)$ lo spazio dei campi di M tangenti lungo f. Indichiamo ancora $\nabla : T_N \times \mathcal{X}_f(M) \to \mathcal{X}_f(M)$ la connessione su tali campi. Abbiamo allora la seguente:

Proposizione 4.1.3.6. *Per ogni $X, W \in \mathcal{X}(N)$, e $Y, Z \in \mathcal{X}_f(M)$ valgono*

$$X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z).$$

$$\nabla_{df X} df(W) - \nabla_{df W} df(X) = df[X, W].$$

La dimostrazione è lasciata come esercizio al lettore. Analizziamo ora il trasporto parallelo della connessione di Levi Civita lungo una curva. Sia J un intervallo reale e $\gamma : J \to M$ una funzione liscia.

Lemma 63. *Siano X e Y due campi paralleli lungo γ.*

$$h(t) = (X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)}),$$

è funzione costante.

Dimostrazione. Calcoliamo la derivata:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)}) = (\nabla_{\frac{d}{dt}} X, Y) + (X, \nabla_{\frac{d}{dt}} Y) = 0.$$

$\square$

Abbiamo allora la seguente:

Proposizione 4.1.3.7. *Sia $\gamma : J \to M$ una curva.*

La metrica g definisce un prodotto scalare nello spazio V_γ dei campi paralleli di γ.

Per ogni s e t in J il trasporto parallelo

$$\tau_{s,t} : T_{M,\gamma(s)} \to T_{M,\gamma(t)}$$

è una isometria :

$$||X_{\gamma(s)}|| = ||X_{\gamma(t)}|| \quad \forall X \in V_\gamma.$$

4.1.4 La derivata covariante

Sia (M, g) una varietà riemanniana, sia ∇ la connessione di Levi-Civita di g. Sia S una varietà differenziale e $f : S \to M$ una mappa liscia iniettiva tale che per ogni $p \in S$, il differenziale df_p sia iniettivo. Il differenziale induce allora una metrica su $h = f^*(g)$ su S (vedere 4.1.2 3). Il caso più importante è quando $S \subset M$ una sottovarietà di M (utilizzando il teorema delle funzioni implicite nella versione iniettiva, 1.3.1.5, restringendoci ad intorni, ci si può ridurre a questo caso).

Vogliamo calcolare la connessione di Levi Civita $\overline{\nabla}$ per (S, h). Fissato un punto $p \in S$ poniamo $S_p = df_p(T_{S,p})$ e definiamo l'ortogonale :

$$N_p = \{v \in T_{M,f(p)} : g_p(v, w) = 0 \ \forall w \in T_{S,p}\}$$

cioè il normale a S in p. La decomposzione ortogonale

$$T_{M,f(p)} = df_p(T_{S,p}) \oplus N_p = S_p \oplus N_p.$$

e le relative proiezioni naturali:

$$\pi_p : T_{M,f(p)} \to S_p$$
$$\theta_p : T_{M,f(p)} \to N_p$$

mostrano infatti che $N = \cup_p N_p$ che è isomorfo a f^*T_M/T_N, il fibrato normale. Le proiezioni, al variare di $p \in S$, definiscono due operatori:

$$\pi : \mathcal{X}_f(M) \to \mathcal{X}_f(M) \quad e \quad \theta : \mathcal{X}_f(M) \to \mathcal{X}_f(M)$$

Porremo

$$\pi(X) = X^T \qquad \theta(X) = X^N,$$

che sono le componenti normali e tangenziali di X. Si noti che il differenziale definisce una biezione

$$df : \mathcal{X}(S) \to \pi(\mathcal{X}_f(M)) \tag{4.4}$$

che possiamo considerare una identificazione. Invece l'immagine $\theta(\mathcal{X}_f(M)) = \Gamma(N)$ corrisponde alle sezioni lisce del fibrato N. Abbiamo allora una decomposizione ortogonale:

$$\mathcal{X}_f(M) = df(\mathcal{X}(S)) \oplus \Gamma(N) \equiv \mathcal{X}(S) \oplus \Gamma(N),$$

dove nella seconda eguaglianza abbiamo usato l'identificazione 4.4.

Allora ∇ definisce allora una mappa

$$\nabla : \mathcal{X}(S) \times \mathcal{X}(S) \to \mathcal{X}_f(M) = \mathcal{X}(S) \oplus \Gamma(N)$$

Proposizione 4.1.4.1. *Con la precedente identificazione si ha*

$$\overline{\nabla} = \pi\nabla$$

ovvero

$$\overline{\nabla}_X Y = \pi(\nabla_X Y) = (\nabla_X Y)^T.$$

(Senza l'identificazione 4.4 si dovrebbe scrivere $\overline{\nabla}_X\ (Y) = (df)^{-1}(\nabla_{df(X)} df(Y))^T$.)

Dimostrazione. Dalle proprietà del'operatore ∇ sui campi di tangenti lungo f abbiamo che $\pi\nabla$ è una connessione lineare su S. Dalla 4.1.3.6 vediamo che essa è priva di torsione e compatibile con la metrica.

□

Nel caso di sottovarietà la proiezione della connessione $\pi(\nabla)$ è detta anche derivata covariante. Abbiamo verificato è cha la derivata covariante è la connessione di Levi Civita della sottovarietà rispetto alla metrica indotta.

Seconda forma fondamentale. Si consideri ora l'operatore $B = \theta\nabla : \nabla : \mathcal{X}(S) \times \mathcal{X}(S) \to \Gamma(N)$

$$B(X,Y) = (\nabla_X Y)^N \tag{4.5}$$

Si ha subito che se $f \in \mathscr{C}^\infty(S)$ allora $B(fX,Y) = f \cdot B(X,Y)$, inoltre

$$B(X,fY) = (\nabla_X f \cdot Y)^N = X(f)Y^N + f(\nabla_X Y)^N = 0 + fB(X,Y)$$

perchè Y è tangenziale. Abbiamo allora: che la 4.5 definisce una mappa:

$$B : T_S \times T_S \to N.$$

Proposizione 4.1.4.2. *La mappa $B : T_S \times T_S \to N$ simmetrica e cioè:*

$$B(X,Y) = B(Y,X).$$

Dimostrazione. Ricordando l'identificazione 4.4 abbiamo:

$$B(X,Y) - B(Y,X) = (\nabla_X Y - \nabla_X Y)^N = df([X,Y])^N = 0$$

□

Quando $S \subset M$ è una sottovarietà, la B è detta seconda forma fondamentale (o anche operatore di forma). Fissato $v \in N_p$ l'applicazione $B_v : T_{S,p} \times T_{S,p} \to \mathbb{R}$,

$$B_v(X,Y) = g_p(B(X,Y),v)$$

è una genuina forma simmetrica su $T_{S,p}$. Quando $\dim S = \dim M - 1$, allora $\dim N_p = 1$ vi è una sola forma simmetrica la cui segnatura determina l'aspetto locale dell'immersione di $S \in M$. Nel caso di una superficie nello spazio la B è la seconda forma fondamentale di Gauss.

4.1.5 Il tensore di Riemann

Sia (M, g) una varietà riemanniana. Il tensore di curvatura della connessione di Levi Civita ∇, è il tensore di Riemann R della varietà. Il tensore di Riemann assume una forma relativamente più calcolabile. L'isomorfismo definito da una metrica

$$L_g : T_M \to T_M^*$$

trasforma tensori di $(r, 1)$ in tensori di tipo $(r+1, 0)$. Se $R(X, Y)Z$ è il tensore di curvatura di ∇ dati X, Y, Z, W dei vettori in $T_{M,p}$

Definizione 4.1.5.1. *Il quadritensore di Riemann è il tensore* $r : T_M \times T_M \times T_M \times T_M \to \mathbb{R}$ *definito da:*

$$r(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \tag{4.6}$$

Il tensore di Riemann ha delle simmetrie

Proposizione 4.1.5.2. *Dati* X, Y, Z, W *dei vettori in* $T_{M,p}$ *Valgono le seguenti:*

1. *R(X,Y)Z+R(Y,X)Z=0*
2. **Identità algebrica di Bianchi***:* $R(X, Y)W + R(Y, W)X + R(W, X)Y = 0$
3. $r(X, Y, Z, W) = -r(Y, X, Z, W)$
4. $r(X, Y, Z, W) = r(Z, W, X, Y)$
5. $r(X, Y, Z, W) = -r(X, Y, W, Z)$
6. **Identità differenziale di Bianchi***:* $\nabla r = 0$*:* $\nabla r(X, Y, Z, T, W) = X(r(Y, Z, T, W)$ $- r(\nabla_X Y, Z, T, W) - r(Y, \nabla_X Z, T, W) - r(Y, Z, \nabla_X T, W) - r(Y, Z, T, \nabla_X W)$.

Dimostrazione. La prima è ovvia, la seconda dipende solo dal fatto che ∇ è senza torsione, si usano de campi X, Y, W aventi bracket nullo il risultato è immediato. La terza simmetria è la più involuta. Per questo si usa ciclicamente la precedente. La quarta segue dalla terza. L'ultima viene da un calcolo abbastanza diretto. □

Nonostante le simmetrie il tensore di Riemann è un oggetto complicato. Ci sono dei tensori semplificati associati:

1. **Curvatura sezionale** dati due vettori indipendenti X, Y si pone e Π il due piano da esso generato la curvatura sezionale di Π è

   $$\rho(\Pi) = \frac{r(X, Y, Y, X)}{(X, X)(Y, Y) - (X, Y)^2}$$

   Nel caso di dimensione 2 ritroviamo la curvatura gaussiana.

2. **Curvatura di Ricci o Tensore di Ricci** Fissati $XeY \in T_{M,p}$

   $$F_{X,Y}(V) = R(X, V)Y$$

è un endomorfismo di $T_{M,p}$. Ha senso calcolarne la traccia Poniamo allora

$$ric(X,Y) = tracciaF_{X,Y}$$

Utilizzando una base ortonotmale E_i abbiamo

$$ric(X,Y) = \sum_i r(X, E_i, Y, E_i)$$

Gtazie alle simmetrie del tensore di Riemann abbiamo $ric(X,Y) = ric(Y,X)$ Il tensore di Ricci gioca un ruolo importante, in alcuni casi può definire una metrica e l'equazione di Einstein

$$ric(X,Y) = \lambda g(X,Y)$$

ha senso.

3. **Curvatura scalare** La curvatura sclare è la tracca della curvatura di ricci:

$$scal(g) = \sum_{i,j} r(E_i, E_j, E_i, E_j)$$

Sia (S,h) una sottovarietà di (M,g) dove la metrica è indotta dalla g. Come nel paragrafo precedente indichiamo con con ∇ la connessione relativa a g e $\overline{\nabla} = \pi\nabla$ la connessione indotta da h. Come prima π e θ saranno le componenti normali e tangenziali dei campi. vogliamo confrontare a confrontare il tensore di Riemann r su M e $\overline{r}$ su s e quello di una sottovarietà:

Siano X, Y, Z, W dei campi tangenti in M tali che la loro restrizione a S siano ivi tangenti a S. Indichiamo sia g che h solo con le parentesi $(,)$. Calcoliamo:

$$(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y W, Z) = (\nabla_X \pi \nabla_Y W, Z)) = X(\nabla_Y W, Z) - (\pi\nabla_Y W, \nabla_X Z) =$$
$$(\nabla_X \nabla_Y W, Z) + (\nabla_Y W, \nabla_X Z) - (\pi\nabla_Y W, \nabla_X Z) = (\nabla_X \nabla_Y W, Z) + (\theta\nabla_X W, \nabla_X Z) =$$
$$= (\nabla_X \nabla_Y W, Z) + (\theta\nabla_X W, \theta\nabla_Y Z) = (\nabla_X \nabla_Y W, Z) + (B(Y,W), B(X,Z))$$

Dove B è l'operatore seconda forma fondamentale definito in 4.5. Analogamente

$$(\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X W, Z) = (\nabla_X \nabla_Y W, Z) + (B(X,W), B(Y,Z))$$

Mentre

$$(\overline{\nabla}_{[X,Y]} W, Z) = (\nabla_{[X,Y]} W, Z)$$

Abbiamo allora **l'equazione di Gauss**:

$$\overline{r}(X,Y,Z,W) = r(X,Y,Z,W) + (B(Y,W), B(X,Z)) - (B(X,W), B(Y,Z)). \tag{4.7}$$

4.2 Geodetiche

Da ora in avanti (M,g) è sarà varietà riemanniana $\mathscr{C}^\infty$, di dimensione m e ∇ la sua connessione canonica (di Levi Civita). La regolarità richesta è in realtà ampiamente sovrabbondante la definizione di lunghezza per curve delle curve $\mathscr{C}^1$ a tratti su M.

4.2.1 Lunghezzza di curve

Come nel caso di $M = \mathbb{R}^m$ vogliamo dare la definizione di lunghezza per curve continue che sono di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti. Cominciamo a dare le seguenti:

Definizione 4.2.1.1. *Sia $J = [a, b]$ un intervallo chiuso della retta reale $\mathbb{R}$. Una suddivisione finita di J, è una successione finita di reali t_i, $i = 1, \ldots, n$, $t_i \leq t_{i+1}$ $a = t_1$ $b = t_n$. Gli intervalli $J_i = [t_i, t_{i+1}]$ si dicono i tratti della suddivisione. Se $\gamma : J = [a, b] \to M$ è una funzione le restrizioni*

$$\gamma_i = \gamma_{|J_i} : J_i \to M$$

saranno i tratti di γ.

Definizione 4.2.1.2. *Sia $J = [a, b]$ un intervallo chiuso della retta reale $\mathbb{R}$.*

1) *Una applicazione $\gamma : J = [a, b] \to M$ è di classe $\mathscr{C}^1$ se la restrizione $\gamma : (a, b) \to M$ è di classe $\mathscr{C}^1$ ed esistono i limiti $\gamma'(a) \in T_{M,\gamma(a)}$ e $\gamma'(b) \in T_{M,\gamma(b)}$:*

$$\gamma'(a) = lim_{t \to a^+} \frac{d\gamma}{dt}(t) \qquad \gamma'(b) = lim_{t \to b^-} \frac{d\gamma}{dt}(t).$$

Cioè

$$\gamma'(t) : [a, b] \to T_M$$

è continua.

2) *Una funzione $\gamma : J = [a, b] \to M$ è $\mathscr{C}^1$ a tratti se è continua, e se esiste una suddivisione finita di J, tale che i suoi tratti γ_i siano $\mathscr{C}^1$.*

3) *L'insieme delle curve $\mathscr{C}^1$ a tratti di M sarà denotato con $\mathcal{F}(M)$.*

Si noti che se γ è $\mathscr{C}^1$ a tratti allora

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} : J \to \mathbb{R}$$

è definita e continua a tratti. e in particolare è una funzione integrabile. Possiamo allora dare la seguente:

Definizione 4.2.1.3. *Sia $\gamma : J \to M$ è una curva $\mathscr{C}^1$, a tratti, $\gamma \in \mathcal{F}(M)$. La lunghezza $l(\gamma)$ di γ (rispetto a g) è il numero reale*

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt.$$

Le proprietà della lunghezza di curve in M sono del tutto analoghe a quelle di curve in $\mathbb{R}^m$.

Definizione 4.2.1.4. *Una applicazione $\mathscr{C}^1$ a tratti crescente $\alpha : [c, d] \to [a, b]$ (rispettivamente. decrescente) tale che $\alpha(c) = a$ e $\alpha(d) = b$ (risp.$\alpha(c) = b$ e $\alpha(d) = a$) sarà detta una riparametrizzione (monotona) dell'intervallo.*

Proposizione 4.2.1.5. *Sia $\gamma : [a, b] \to M$ una funzione $\mathscr{C}^1$ a tratti.*

0) $l(\gamma) = 0 \iff \gamma$ *è costante.*

1) Sia $T_j,\ j = 1, k$ *una suddivisione di* $[a, b]$ *sia* γ_j *i sui tratti allora*

$$l(\gamma) = \sum_j l(\gamma_j).$$

In particolare la lunghezza di γ *è la somma delle lunghezze dei suoi tratti regolari*

2) Se $\alpha : [c, d] \to [a, b]$ *è una riparametrizzazione monotona allora* $l(\gamma(\alpha)) = l(\gamma)$.

La lunghezza non dipende dal verso di percorrenza: se $\overline{\gamma} = \gamma(b + a - s) : [a, b] \to M$

$$l(\gamma) = l(\overline{\gamma}).$$

Inoltre, come nel caso euclideo, possiamo utilizzare la lunghezzza d'arco $\alpha(s) : [0, l(\gamma)] \to [a, b]$, l'inversa di

$$\beta(s) = \int_a^s ||\gamma'(t)||dt = l(\gamma_{|[a,s]}),$$

per riparametrizzare la curva. Se poniamo $\Gamma(s) = \gamma(\alpha(s))$ allora nei punti lisci vale:

$$||\Gamma'(s)|| = 1.$$

La curva di partenza è percorsa a velocità costante. Possiamo sintetizzare la 4.2.1.5

Proposizione 4.2.1.6. *Il funzionale lunghezza*

$$l : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R} \tag{4.8}$$

è additivo per composizione finita di cammini e invariante per riparametrizzazioni monotone crescenti e cambiamento di verso di percorrenza.

Dati due punti p e q in M consideriamo i cammini $\Omega(p, q) \subset \mathcal{F}(M)$, che congiungono p e q:

$$\Omega(p, q) = \{\gamma \in \mathcal{F}(M), \gamma : [a, b] \to M :\ \gamma(a) = p,\ \gamma(b) = q\}. \tag{4.9}$$

Notiamo che $\Omega(p, q)$ può essere vuoto se M non è connessa. Lo studio dei minimi funzionale $l : \Omega(p, q) \to \mathbb{R}$ conduce alla teoria delle geodetiche. e alla definizione di distanza geodetica:

Definizione 4.2.1.7. *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana. Assumiamo* M *connessa. Dati due punti* p *e* q *in* M*. Porremo*

$$d(p, q) = d_g(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega(p,q)} l(\gamma). \tag{4.10}$$

Vale il seguente

Theorem 4.2.1.8. *La distanza geodetica è una distanza su* M *la cui topologia indotta è quella di* M

La proprietà simmetrica e la disuguaglianza triangolare seguono immediatamente da 4.2.1.6, per inversione e composizione di cammini. Inoltre $d(p, p) = 0$. Il fatto che $d(p, q) > 0$ per $p \neq q$ e la verifica che la topologia indotta da d_g è la topologia di M verrà provato nel seguito (vedere 4.2.4.3).

4.2.2 Geodetiche e variazione prima

Cominciamo brutalmente con la seguente:

Definizione 4.2.2.1. *Sia J un intervallo reale e $\gamma : J \to M$ una curva liscia. Diremo che γ è una geodetica se soddisfa all'equazione:*

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}\gamma' = 0. \tag{4.11}$$

La definizione 4.2.2.1 ha senso per ogni connessione lineare, essa dice che il vettore tangente alla curva $\gamma'(t)$ è parallelo. Si noti che la geodetica è curva parametrizzata e, nel caso di una connessione compatibile con la metrica, $||\gamma'(t)||$ è costante (vedere 4.1.3.7). Il parametro è proporzionale allora alla lunghezza d'arco. L'equazione delle geodetiche è legata con il funzionale lunghezza. Supponiamo di avere una funzione regolare $F(t,s)$

$$F : [a,b] \times (-\sigma,\sigma) \to M.$$

Fissato s consideriamo la curva (*variazione*)

$$\gamma_s(t) = F(t,s).$$

Supporremo che $F(a,s) = p$ e $F(b,s) = q$ per ogni s, quindi $\gamma_s \in \Omega(p,q)$, ovvero F è una omotopia relativa ad a e b. Supporremo che γ_0 sia parametrizzata dalla lunghezza d'arco. Porremo

$$dF(\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial F}{\partial t} \qquad dF(\frac{\partial}{\partial s}) = \frac{\partial F}{\partial s}. \tag{4.12}$$

In particolare avremo

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,s) = \gamma_s'(t),$$

quando $s = 0$ semplicemente $\gamma'(t)$. Il campo X

$$X_t = dF\frac{\partial}{\partial s}(t,0) = \frac{\partial F}{\partial s}(t,0),$$

detto il campo tangente alla variazione, è un campo tangente lungo γ. Si noti che per costruzione $X_a = 0,\ X_b = 0$. Se pensiamo $\Omega(p,q)$ come ad una varietà (infinito dimensionale) γ_s è una curva di $\Omega(p,q)$ con punto base in γ e X è il suo vettore tangente corrispondente. La funzione l è una funzione e cerchiamo i suoi punti critici. Questo conduce alla variazione di Eulero Lagrange, la lagrangiana in questo caso è l. Consideriamo allora la funzione *la variazione della lunghezza*

$$l(s) = l(\gamma_s) = \int_a^b ||\gamma_s'(t)||dt = \int_a^b ||\frac{\partial F}{\partial t}(t,s)||dt.$$

Calcoliamo la derivata di l in 0, *la variazione prima*, passando sotto il segno di integrale:

$$l'(0) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}||\frac{\partial F}{\partial t}(t,s)||_{|s=0}dt = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{||\frac{\partial F}{\partial t}(t,0)||^2}}\frac{\partial}{\partial s}(||\frac{\partial F}{\partial t}(t,s)||^2)_{|s=0}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial F}{\partial t}(t,s), \frac{\partial F}{\partial t}(t,s))_{|s=0}dt = \int_a^b (\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial F}{\partial t}(t,s), \frac{\partial F}{\partial t}(t,s))_{|s=0}dt =$$

$$\int_a^b (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s}(t,s), \frac{\partial F}{\partial t}(t,s))_{|s=0} dt = \int_a^b (\nabla_{\frac{d}{dt}} X_t, \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(X_t, \gamma'(t)) - (X_t, \nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma') dt$$

$$= (X_b, \gamma'(b)) - (X_a, \gamma'(a)) - \int_a^b (\nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma', X) dt. \qquad (4.13)$$

Come abbiamo osservato X_a e X_b sono nulli, in conclusione:

Proposizione 4.2.2.2. *Con le precedenti notazioni abbiamo:*

$$l'(0) = -\int_a^b (\nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma', X) dt. \qquad (4.14)$$

Se γ è geodetica abbiamo allora $l'(0) = 0$. E' facile vedere il viceversa e cioè che se $l'(0) = 0$ per ogni variazione allora γ deve essere geodetica. Per questo sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione regolare $\varphi > 0$, in (a, b), e $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Si definisca il campo tangente lungo γ $X = \varphi \nabla_{\frac{d}{dt}\gamma'}$, È facile costruire una variazione $F = G(\gamma(t), s)$ il campo tangente alla variazione è proprio X. Allora la condizione $l'(0) = 0$ implica

$$0 = \int_a^b (\nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma', X) dt = \int_a^b \varphi ||\nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma'||^2 dt$$

e quindi

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma' = 0.$$

In conclusione le geodetiche sono i punti critici del funzionale lunghezza.

4.2.3 Equazione delle geodetiche

Sia $\gamma(t) = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ le coordinate di una curva. Il calcolo dell"equazione differenziale del trasporto parallelo 1.25, ci dice che γ è una geodetica se e solo se.

$$x_k''(t) + \sum \Gamma_{i,j}^k (x(t)) x_i'(t) x_j'(t) = 0. \qquad (4.15)$$

Allora l'equazione delle geodetiche in coordinate diventa un sistema differenziale del secondo ordine non lineare. Introducendo le $y_i(t) = x_i'(t)$ il sistema 4.15 diventa:

$$y_k' = \sum \Gamma_{i,j}^k (x(t)) y_i(t) y_j(t), \quad x_k'(t) = y_k(t) \qquad (4.16)$$

Il significato intrinseco di questo è il seguente: per ogni curva liscia $\gamma(t)$ di M. Il sollevamento canonico

$$\gamma'(t) = \gamma'(t)_{\gamma(t)} \in T_{(M, \gamma(t))}$$

di γ definisce una curva in T_M. Se $\pi : T_M \to M$ la proiezione

$$\pi(\gamma'(t)) = \gamma(t).$$

Le equazioni in 4.16 sono le equazioni di $\gamma'(t)$. Il sistema è definito da un campo vettoriale

$$Y \in T_{T_M}.$$

Possiamo applicare la teoria delle equazioni differenziali ordinarie e dei campi vettoriali associati per risolvere 4.16. Procuriamoci degli intorni di T_M a supporto compatto. Se $U \subset\subset M$ e $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ consideriamo $\mathcal{U}_R \subset T_M$:

$$\mathcal{U}_R = \{v \in T_M : \pi(v) \in U,\ ||v|| < R\}.$$

Ora abbiamo $\mathcal{U}_r \subset\subset T_M$. Allora esiste $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ tale che sia definito definire il **flusso geodetico** $G : \mathcal{U}_R \times (-\delta, \delta) \to T_M$. Se poniamo

$$\pi G(v, t) = \gamma(t) : (-\delta, \delta) \to M$$

e $\pi(v) = p$, allora:

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma'_{p,v} = 0,\ \gamma_{v,p}(0) = p,\ \gamma'_{v,p}(0) = v. \tag{4.17}$$

L'omogeneità dell'equazione 4.15 mostra un'importante proprietà delle geodetiche. Se $\gamma_{v,p}(t)(-\delta, \delta) \to M$ è la geodetica di 4.17 e $s > 0$ allora $\rho(t) = \gamma_{v,p}(st) : (-\delta s^{-1}, \delta s^{-1})$ è geodetica e $\rho(0) = p$ e $\rho'(0) = sv$:

$$\gamma_{v,p}(st) = \gamma_{sv,p}(s). \tag{4.18}$$

Se paghiamo in termini di velocità possiamo allungare l'intervallo di tempo delle geodetiche (chi va piano va sano anche se non lontano). In particolare se

$$a < \frac{1}{\delta}$$

e $r = aR$ tali che il flusso geodetico è definito

$$G : \mathcal{U}_r \times (-\sigma, \sigma) \to M$$

con $\sigma > 1$.

Proposizione 4.2.3.1. *1. Sia $p \in M$ e $v \in T_{M,p}$ allora esiste $\delta_{v,p} > 0$ e una sola $\gamma_{v,p}(t) : (-\delta_{v,p}, \delta_{v,p}) \to M$ tale che $\gamma_{v,p}(0) = p, \gamma'_{v,p}(0) = v$*

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma'_{v,p}(t) = 0.$$

2. $\gamma_{v,p}(st) = \gamma_{av,p}(t)$, $\quad \delta_{sv,p} = s^{-1}\delta_{v,p}$.

3. Sia $U \subset\subset M$ allora esistono $\sigma > 1$ e $r > 0$ tale che il flusso geodetico definisca

$$G_r : \mathcal{U}_r \times (-\sigma, \sigma) \to T_M.$$

Fissato $p \in M$ sia $Q_p \subset T_{p,M}$ il luogo in cui le geodetica $\gamma_{v,p}$ sono definite in un intervallo $J \supset [0, 1]$

$$Q_p = \{v \in Q_p : \gamma_{v,p}(-\epsilon, 1 + \epsilon) \to M\}. \tag{4.19}$$

Dalla proposizione 4.2.3.1 sappiamo che esiste un $r > 0$ tale che $U_r = \{v \in T_{M,p} : ||v|| \leq r\}$ è contenuto in G_p.

Definizione 4.2.3.2. *La mappa esponenziale è l'applicazione* $\exp_p : Q_p \to M$

$$\exp_p(v) = \gamma_{v,p}(1) \tag{4.20}$$

Si noti che se $v \in Q_p$, usando la 4.18 abbiamo

$$\gamma_{v,p}(t) = \exp_p(tv) \tag{4.21}$$

Possiamo scrivere allora; $L_r = \pi G_r : \mathcal{U}_r \times (-\sigma, \sigma) \to M$

$$L_r(v, s) = \exp_{\pi(v)}(tv).$$

Theorem 4.2.3.3. *Per ogni* p *esiste un intorno* U *aperto* $p \in U$ *e un* $r > 0$ *tale che l'applicazione* $H : \mathcal{U}_r \to M \times M$

$$H(v) = (\pi(v), \exp_p(v))$$

è un diffeomorfismo sull'immagine.

Dimostrazione. È sufficiente mostrare il teorema per un aperto U intorno coordinato di p. Supporremo allora $T_U = U \times \mathbb{R}^m$ dove l'inclusione $U \to T_U$, $p \to (p, 0)$, è definita dal campo nullo. Abbiamo allora:

$$H(p, 0) = (p, p), \quad H(p, tv) = (p, \exp_p(tv)) = (p, \gamma_{p,v}(t))$$

Le curve orizzontali, $(a(t), 0)$, diventano diagonali $(a(t), a(t))$, le rette verticali (p, tv) sono i raggi esponenziali. Allora per il differenziale di H vale $D(H)_{p,0}(a'(0), 0) = (a'(0), a'(0))$ e $D(H)_{p,0}(p, \gamma'_{p,v}(0)) = (0, v)$ La matrice associata al $DH_(p, 0)$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}$$

dove I è la matrice identica. Il rango di DH è massimo e allora H è un diffeomorfismo locale nell'intorno di $\mathcal{U} \times (p, 0)$. A meno di restringere $\mathcal{U}$ possiamo allora trovare un $r > 0$ tale che $H : \mathcal{U}_r \to M$ tale che H sia un diffeomorfismo. □

Corollario 4.2.3.4. *Sia* $W \subset\subset M$ *allora esiste un* $r > 0$ *tale per ogni* $p \in W$ *se tale la mappa esponenziale*

$$\exp_p : U_{p,r} = \{v \in T_{M,p} ||v|| < r\} \to M$$

è un diffeomorfismo.

Dimostrazione. É sufficiente considerare il caso in cui W è compatto. Il precedente teorema 4.2.3.3 dimostra il corollario nel caso di intorni. Possiamo allora ricoprire W con un numero finito di intorni U_i che soddisfano al corollario per dei reali positivi r_i. Vediamo allora che se $r = \min r_i$ $\exp_p : U_{p,r} \to M$ è diffeomorfismo per ogni $p \in W$. □

4.2.4 Coordinati normali

Nel pargrafo precedente, con corollario 4.2.3.4 , si è dimostrato, che la mappa esponenziale è, vicino al vettore nullo, un diffeomorfismo locale. Utilizzeremo la sua inversa come applicazione coordinata. Fissato $p \in M$ una base ortonormale di $T_{M,p}$ definisce una isometria χ tra il tangente e spazio euclideo standard: $\chi : (T_{M,p}, g_p) \to (\mathbb{R}^m g_{standard})$ Per ogni numero reale $\rho > 0$

$$U_\rho = U_p = \{v \in T_{M,p}, ||v|| < \rho\}$$

corrisponde disco aperto euclideo $\overline{U}_\rho = \{v \in T_{M,p} ||v|| \geq \rho\}$ i disco chiuso, e il suo bordo, $\partial U_\rho = \{v \in T_{M,p} ||v|| = \rho\}$, alla sfera S^{m-1}.

Definizione 4.2.4.1. *Si fissi $R > 0$ tale che $\exp_p : U_R \to M$ sia un diffeomorfismo (vedere 4.2.3.4). Posto $\varphi : B_R = \exp_p(U_R)$.*

1. *Le coordinate per fornite dall'inversa, $\varphi = \chi(\exp_p) : B_r \to R^m$ sono le coordinate* **normali** *(o polari) di p.*

2. *Per $0 < r < R$ $B_r = B_r(p) = \exp_p(U_r)$ $\overline{B}_r = \overline{U}_r$ e $S_r = S_r(p) = \exp_p(\partial U_r)$, sono dette rispettivamente* **la palla geodetica** *la palla chiusa geodetica e la* **sfera geodetica** *di centro p e raggio r.*

Il significato di tale definizione è rafforzato dalla seguente:

Proposizione 4.2.4.2. *Sia $q \in S_r(p)$ un punto della sfera geodetica di centro p e raggio $r : q = \exp_p(v)$ $||v|| = r$. A meno di riparametrizzazioni monotone la curva $\gamma_v(t) = \exp(tv)$ è l'unico punto di minimo in $\Omega(p, q)$, cioè l'unica curva di minima distanza che connette p e q. In particolare*

$$d_g(p, q) = r.$$

dove d_g è la distanza geodetica indotta da g (vedere 4.2.1.7).

Nota 4.2.4.3. *Notiamo che la proposizione implica il teorema 4.2.1.8. Infatti dati due punti distinti p e q possiamo trovare una palla geodetica B_R di centro p tale raggio $R > 0$ $q \notin B_R$. Allora $d_g(p, q) \geq R$ perchè ogni curva che connette p e q interseca tutte le sfere geodetiche di raggio $r \leq R$. Inoltre i dischi geodetici $D_p(r) = \{q : d_g(p, q) < r\}$ coincidono con le palle geodetiche per $r < R$. Le palle geodetiche definiscono un sistema di intorni di p nella topologia data abbiamo che la distanza geodetica induce la topologia della varietà M.*

La dimostrazione della proposizione 4.2.4.2 si basa sull'importante:

Lemma 64. di Gauss *Sia $q \in S_r(p)$ un punto della sfera geodetica di centro p e raggio $r : q = \exp_p(v)$, $||v|| = r)$. Allora posto $\gamma(t) = \exp(tv)$, $\gamma'(1) \in T_{M,q}$ è ortogonale allo spazio tangente $T_{S_r,q}$ della sottovarietà $S_r \subset M$ a q.*

Dimostrazione. Supponiamo $\exp_p : U_R \to B_R \subset M$ sia un diffeomorfismo e fissiamo $v \in T_{M,p}$ $||v|| = r < R$. Allora se poniamo $S^{n-1}(r) = \{z \in T_{M,p} : ||z|| = r\}$:

$$S_r = exp_p(S^{n-1}(r)).$$

Il tangente di $T_v = T_{S^{n-1}(r),v}$ della sfera a v è allora

$$T_v = \{w \in T_{M,p} : (v, w) = 0\}.$$

Le curve

$$v + sw$$

in $T_{M,p}$ rappresentano tali vettori. I vettori del tangente alla sfera geodetica S_r, sono immagine del differenziale

$$D(\exp_p)_v(T_v) \subset T_{M,q}.$$

Questi vettori sono rappresentati dalle curve

$$\alpha(s) = \exp_p(v + sw).$$

Se $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ è il raggio geodetico dobbiamo provare

$$g_q(\gamma'(1), \alpha'(0)) = 0.$$

Per questo costruiamo la variazione

$$F(t, s) = \exp_p(t(v + sw))$$

(definita per t e s : $t^2(||v||^2 + s^2||w||^2) < R^2$). Definiamo (come in 4.12)

$$dF(\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial F}{\partial t} \qquad dF(\frac{\partial}{\partial s}) = \frac{\partial F}{\partial s}.$$

Abbiamo

$$\frac{\partial F}{\partial t}(1, 0) = \gamma'(1) \qquad \frac{\partial F}{\partial s}(1, 0) = \alpha'(0).$$

Posto

$$f(t, s) = (\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t})$$

Dobbiamo provare che

$$f(1, 0) = g_q(\gamma'(1), \alpha'(0)) = 0.$$

Intanto si ha $f(0, s) = 0$, fissato poi $\overline{s}$ notiamo che la curva $\exp_p(t(v + \overline{s}w)) = \gamma_{v+\overline{s}w}(t)$ è una geodetica. Abbiamo allora :

$$\nabla_{\frac{\partial F}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial t}(t, \overline{s}) = \nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma'_{v+\overline{s}w} = 0,$$

ed inoltre

$$(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}) = ||v + sw||^2 = ||v||^2 + s^2||w||^2,$$

perchè $(v, w) = 0$.

Ora calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}) + (\frac{\partial F}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial t}) =$$

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}) + 0 = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}) = s||w||^2.$$

Abbiamo

$$\frac{\partial f(t,s)}{\partial t} = s||w||^2 \ e \ f(0,s) = 0,$$

e quindi $f(t,s) = st||w||^2$:

$$f(1,0) = 0.$$

$\square$

Riportiamo una seconda dimostrazione che usa la formula di variazione prima

Dimostrazione. Si considerino v e w vettori nel tangente di p unitari e ortogonali. Consideriamo $y(s) = cos(s)v + sin(s)w$ si noti che $y(s)$ è unitario $F(s,t) = exp(t(y(s))$ con $0 \leq t \leq r$ e $0 \leq s \leq \pi/2$. Fissato $s = \overline{s}$ le curve $F(\overline{s}, t) = \gamma_{\overline{s}}$ sono raggi gedotici. Inoltre tali curve hanno la stessa lunghezza allora la funzione $l(s) = l(\gamma_s)$ è costante e $l'(0) = 0$ In 4.13 abbiamo essendo $\gamma = \gamma_0$ è geodetica $\gamma'(1) = v$

$$0 = (X_r, \gamma_0'(r)) - (X_0, \gamma_0'(0)) - \int_0^r (\nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma(1)', X)dt = (X_r, v)$$

Infatti $X(0) = 0$ perchè il $F(s,0) = p$ ́e costante. Posto $q = exp_p(v)$ abbiamo che le curve $\exp_p(cos(s)v + sin(s)w))$ e $exp_q sw$ sono equivalenti nel tangente di q quindi

$$Dexp_q(w) = X_r.$$

$\square$

Dimostrazione. (Del teorema 4.2.4.2.) Sia $z(t) : (0,L) \to M$ una curva $\mathscr{C}^1$ a tratti che connette p e $q = \exp_p(v)$, $||v|| = r$. Supporremo z parametrizzata dalla lunghezza d'arco:

$$l(z) = L.$$

Cominciamo a provare che $L \geq r$. Non è restritttivo supporre che $z(t) \in B_r \setminus \{p\}$ per $t \in (0,L)$. Consideriamo il diffeomorfismo

$$\psi : (0,R) \times S^{m-1} \to B_R \setminus \{p\}$$

indotto dalla mappa esponenziale

$$\psi(r,y) = \exp(r \cdot y).$$

Queste sono le vere coordinate polari. I raggi, cioè le immagini delle curve $\beta_v(r) = (r,v)$ sono geodetici. Sia $\frac{\partial}{\partial r}$ è il campo tangente alle curve β e $X_r = D\psi(\frac{\partial}{\partial r})$ la sua immagine $B_R \setminus \{0\}$. Abbiamo

$$||X_r|| = 1.$$

Allora se scriviamo:

$$z(t) = \exp(r(t)w(t)) = \psi(r(t), w(t)),$$

dove $w(t) \in S^{n-1}$, $0 < r(t) \leq r$. Per il lemma di Gauss X_r è il normale alle sfere geodetiche allora la decomposizione

$$z'(t) = D\psi(r' \frac{\partial}{\partial r} + w') = r'X_r + W$$

è ortogonale. In particolare abbiamo

$$1 = ||z'(t)|| \geq ||r'(t)X_r|| \geq |r'(t)| \geq r'(t).$$

Quindi

$$r = \int_0^L r'dt \leq \int_0^L |r'|dt \leq \int_0^L ||z'||dt = L,$$

quindi

$$L \geq r.$$

Notiamo ora che se $r = L$ allora deve valere le uguaglianze:

$$r'(t) = |r'(t)| = 1 \ e \ W = 0.$$

Quindi abbiamo $r(t) = t$, $w'(t) = 0$ e allora $w(t) = w(0)$. Ma allora abbiamo $z(t) = exp(tw(0))$. Se poniamo $v = rw(0)$ abbiamo

$$z(t) = \exp(\frac{tv}{r}).$$

□

Dal precedente risultato possiamo trarre alcune osservazioni importanti (che lasciamo come esercizi importanti). La prima è che una curva di lunghezza minima deve essere per forza liscia la seconda è che in coordinate polari la metrica g ha una decomposizione ortogonale

$$dr^2 + h_{(s,r)}.$$

Fissato r,h è una metrica sulla sfera. Quando $\dim M = 2$:

$$g = dr^2 + f(r, \theta)d\theta^2.$$

Esercizi 4.2.4.4. *Sia N è una sottovarietà $p \notin N$. Sia $\gamma(t) : [a, b] \to M$, $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q \in N$. Dimostrare che se γ minimizza la distanza $d_g(p, N)$ allora è una geodetica e $\gamma'(b)$ deve essere ortogonale a $T_{N,q}$. Dire se è vero il viceversa. Considerare il caso di una curva che minimizza la distanza di due suttovarietà. Dimostrare che per varietà compatte esistono sempre delle geodetiche minimizzanti la distanza di due punti.*

4.2.5 Convessità geodetica.

Cominciamo con la seguente

Definizione 4.2.5.1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana, un insieme $U \subset M$ è detto geodeticamente convesso se per ogni $p, q \in U$ un unico arco di geodetico, minimizzante la lunghezza tra p e q e tale arco è contenuto in U.*

Ci piace riportare una dimostrazione del seguente:

Theorem 4.2.5.2. di Whitehead. *Per ogni $p \in M$ esiste un $r > 0$ tale che la palla geodetica $B_r(p)$ di centro p e raggio r è geodeticamente convessa.*

Si noti che un aperto geodeticamente convesso è contraibile. Dato che l'intersezione di insieme convessi è convesso, il teorema di Whitehead implica che su ogni varietà esiste un atlante tale che le intersezioni non vuote siano contraibili. Questo risultato, di banalità locale dei ricoprimenti, è utile nello studio della topologia algebrica delle varietà.

Premettiamo il calcolo dei simboli di Christoffel in coordinate normali.

Proposizione 4.2.5.3. *Sia $B_R(p)$ una palla geodetica e $\psi : B_R(p) \to \mathbb{R}^m$ la mappa coordinata indotta dall'inversa dell'esponenziale (e la scelta di una base ortonormale di $T_{M,P}$): $\psi(q) = (x_1(q), \dots x_m(q))$. Allora $\Gamma^k_{i,j}$ i simboli di Christoffel della connessione ∇ di Levi Civita si annullano in p :*

$$\Gamma^k_{i,j}(x_i(p)) = \Gamma^k_{i,j}(0) = 0$$

Dimostrazione. I raggi geodetici sono le rette per l'origine,

$$x_i(t) = a_i t.$$

Queste devono soddisfare alle equazioni delle geodetiche

$$x''_k(t) + \sum \Gamma^k_{i,j}(x(t)) x'_i(t) x_j(t) = 0.$$

Calcolando il tutto in zero abbiamo

$$\sum \Gamma^k_{i,j}(0) a_i a_j = 0$$

per ogni $(a_1, \dots, a_m)$ questo implica che i coefficienti della forma quadrati ca sono nulli: $\Gamma^k_{i,i}(0) = 0$ e $\Gamma^k_{i,j}(0) + \Gamma^k_{j,i}(0) = 0$ la simmetria $\Gamma^k_{i,j} = \Gamma^k_{j,i}$ prova che $\Gamma^k_{i,j}(0) = 0$. □

Utilizzando questo possiamo ora provare il seguente:

Lemma 65. *Sia $B_R(p)$ una palla geodetica di centro p e raggio R allora esiste un $r < R$ tale che se $q \in S_r$, ogni tratto di geodetica passante per q e tangente alla sfera geodetica S_r rimane esterna alla palla geodetica B_r. vicino a q. Ovvero se $v \in T_{S_{r,q}}$ è tangente alla sfera geodetica allora*

$$d_g(\exp_q(tv), p) > r$$

$\forall t \in (-\delta(v), \delta(v)) \setminus \{0\}$, *per qualche* $\delta(v) > 0$.

Dimostrazione. Utilizzeremo ancora le coordinate normali. Se $h \in B_R$ poniamo $\psi(h) = y(h) = (y_1(h), \dots, y_m(h))$ abbiamo

$$\psi(B_R) = \{y \in \mathbb{R}^m : ||y|| < R\}$$

e

$$d_g(h, p) = ||y(h)||$$

$\psi(p) = (0, \dots, 0)$,

$$\psi(q) = \overline{y} = (\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_m),$$

$r = ||\overline{y}||$. Il lemma di Gauss ci dice $d\psi(T_{S_r}) = \{v : v \cdot, \overline{y} = 0\}$. Prendiamo i vettori v tali che:

$$\{v : d\psi(v) = a = (a_1, \dots, a_m) : \sum_i a_i \overline{y}_i = 0, \sum_i a_i^2 = 1\}.$$

Allora $\gamma(t) = \exp_q(tv)$ è, a meno di parametrizzazione, la geodetica generale tangente a S_r. Poniamo $\psi(\gamma(t)) = y(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t))$ e

$$f(t) = y(t) \cdot y(t) = \sum_i y_i^2(t).$$

Per costruzione $f'(0) = 0$, e

$$f''(0)/2 = \sum_k a_k^2 + \sum_k \overline{y}_k \cdot {y''}_k(0) = 1 + \sum_{i,j,k} \Gamma_{i,j}^k(\overline{y}) a_i a_j \overline{y}_k.$$

Se possiamo provare che per r sufficientemente piccolo

$$\sum_{i,j,k} \Gamma_{i,j}^k(\overline{y}) a_i a_j \overline{y}_k < 1$$

avremo $f''(0) > 0$ e quindi avremo provato, come si voleva, che $f(t)$ ha un minimo locale in zero.

Per dimostrare questo consideriamo $F : B_R \times S^{m-1} \to \mathbb{R}$:

$$F(q,a) = \sum_{i,j,k} \Gamma_{i,j}^k(q) a_i a_j y_k(q).$$

Per la proposizione 4.2.5.3 $F(p,a) = 0$ per ogni a. Allora esiste un $r \leq R$ tale che $F^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$ è un aperto che contiene $\{p\} \times S^{m-1}$. Essendo S^{m-1} compatto abbiamo

$$F^{-1}(-\infty, \frac{1}{2}) \supset B_r \times S^{m-1}$$

$r < R$. Quindi

$$F(q,a) \leq \frac{1}{2} \quad \forall a \in S^{m-1},$$

e $q \in B_r$ $\square$

Dimostrazione. Del teorema di Whitehead. Fissato un intorno compatto K di p (per esempio una palla geodetica chiusa) e $R > 0$ tale che per ogni $q \in K$ la $B_R(q)$ sia una palla geodetica in M. Sia poi $r_1 < R$ tale che $B_{r_1}(p) \subset K$ e tale che per r_1 valga il lemma 65. Prendiamo un reale r per cui:

$$0 < r < \frac{r_1}{2}.$$

Dimostreremo che $B_r(p)$ è geodeticamente convesso. Per questo fissati due punti q_1 e q_2 in B_r si ha:

$$d_g(q_1, q_2) \leq d_g(q_1, p) + d_g(p, q_1) < 2r < r_1 < R.$$

Allora esiste una sola geodetica $\gamma(t) : [0, L] \to M$ minimizzante che congiunge $\gamma(0) = q_1$ e $\gamma(L) = q_2$ q_2, questa è contenuta in una palla geodetica di centro p_1 e

$$L < 2r$$

Dobbiamo ara provare che per ogni t $\gamma(t) \in B_r$. Prima di tutto osserviamo che per ogni t

$$\gamma(t) \in B_{r_1} \supset B_{2r}.$$

Infatti se non fosse così dovrebbe attraversare (due volte) la sfera di raggio r e quella di raggio $r_1 > 2r$, ma allora per la sua lunghezza dovrebbe valere

$$L \geq 2(r_1 - r) > 2r$$

che è assurdo. Ora prendiamo $(\bar{t})$ tale che la distanza $d_g(p, \gamma(\bar{t})) = s$ sia massima. Se $\bar{t} \in (0, L)$ è interno allora l'arco di geodetica in $\gamma(\bar{t})$ è interna alla sfera di centro p e raggio $s \leq r_1$. Una contraddizione. □

4.2.6 Completezza geodetica.

In si 4.2.3.2 si era definito il dominio della mappa esponenziale. Particolarmente importante è il caso in cui il dominio sia tutto lo spazio tangente.

Definizione 4.2.6.1. *Una varietà connessa (M, g) si dice geodeticamente completa se la mappa esponenziale è definita per ogni vettore $v \in T_M$.*

Una varietà è geodeticamente completa se le sue geodetiche si possono prolungare. Il teorema di Hopf Rinow caratterizza le varietà geodeticamente complete:

Theorem 4.2.6.2. Hopf Rinow *Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa. Sono equivalenti:*

1. *(M, g) è geodeticamente completa.*
2. *Esiste $p \in M$ tale che il dominio della mappa esponenziale exp_p è l'intero spazio tangente $T_{M,p}$.*
3. *La metrica d_g è completa.*

Inoltre due punti p, q di una varietà (M, g) e geodeticamente completa sono congiunti da una curva (geodetica minimizzante) $\gamma : [0, L] \to M$

$$\gamma(0) = p, \;\; \gamma(L) = q, \qquad d_g(p, q) = L.$$

Prima di dare la dimostrazione ecco alcuni corollari importanti

Corollario 4.2.6.3. *Se M è compatta allora M è geodeticamente completa.*

Dimostrazione. La metrica d_g induce la topologia e ogni spazio metrico compatto è completo. □

Corollario 4.2.6.4. *Sia (M, g) una varietà geodeticamente completa e $N \subset M$ è una sottovarietà chiusa e connessa. Sia h la la metrica riemanniana di N indotta dalla g. Allora N è geodeticamente completa.*

Dimostrazione. Indichiamo con d_h è distanza indotta da h. Per ogni coppia di punti in N abbiamo

$$d_g(p, q) \leq d_h(p, q),$$

perchè abbiamo meno curve in N che in M. Allora ogni successione di Cauchy in (N, d_h) è di Cauchy in (M, d_g) e quindi ammette limite in M. Essendo N chiusa tale limite è in N. □

Corollario 4.2.6.5. *Se $\pi : M' \to M$ è un rivestimento con g è geodeticamente completa. Sia $g' = \pi^* g$ la metrica su M' indotta. Allora (M', g') è geodeticamente completa.*

Dimostrazione. La mappa $\exp_p : T_{M,p} \to M$ si solleva a $f : T_{M,p} \to M'$ perchè il gruppo fondamentale dello spazio tangente è banale: $\pi_1(T_{M,p}) = 0$. Dato che i sollevamenti di geodetiche sono geodetiche identificando $T_{M,p}$ e $T_{M,\tilde{p}}$ abbiamo che $f = \exp_{\tilde{p}}$ è definita per ogni vettore del tangente. □

Si noti nelle ipotesi dei precedenti corollari abbiamo che che due punti sono congiunti da una geodetica minimizzante. Questo vale per ogni sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^m$.

Premettiamo alla dimostrazione del teorema un lemma. La prima parte mette in luce un aspetto costitutivo delle distanze geodetiche quello dell'esistenza di punti intermedi. La dimostrazione è tattica: la mira del cacciatore. La seconda parte prova che se non ci sono ostacoli il colpo va a segno.

Lemma 66. *Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa, due punti $p, q \in M$, $q \neq p$ tali che $L = d_g(p, q)$.*

1) Allora esiste un $L \geq r > 0$ e un punto $p' \in M$ tale che:

  a) $d_g(p, p') = r$;

  b) esiste una geodetica $\gamma(t) : [0, r] \to M$, $\gamma(0) = p \ \ \gamma(r) = p'$;

  c) $d_g(p, q) = d_g(p, p') + d_g(p', q) \ : \ L = r + d_g(p', q)$.

2) Se la geodetica γ trovata è si estende in $[0, L]$ allora $\gamma(L) = q$.

Dimostrazione. 1. Cominciamo a prendere una palla geodetica $\overline{B}_R$ se $q \in B_R$ allora $L < R$, $q = \exp_p v$ e possiamo prendere $p' = q$ $L = r$ e

$$\gamma(t) = exp(t\frac{v}{L}).$$

Possiamo allora supporre $q \notin B_R$ prendiamo allora $0 < r \leq R$ e la sfera geodetica S_r. Consideriamo ora l'applicazione $k : S_r. \to \mathbb{R}$:

$$k(x) = d_g(x, q).$$

Ora S_r è compatto k continua e sia p' un punto di minimo: $d_g(x, q) \geq d_g(p', q)$ $\forall x \in S_r$. Scriviamo allora $q' = \exp(v)$ e

$$\gamma(t) = exp(t\frac{v}{r}).$$

La direzione v è la mira che prendiamo per colpire q. Per costruzione $d_g(p, p') = r$. Vediamo ora che

$$d_g(p, p') + d_g(p', q) = d_g(p, q) + L.$$

Fissato $\epsilon > 0$ esiste $\alpha : [a, b] \to M$ $\alpha \in \Omega(p, q)$ (vedere 4.2.1.7) tale che $l(\alpha) < L + \epsilon$. Ora esiste un $c \in (a, b)$ tale che $\overline{(}p) = \alpha(c) \in S_r$ Se indichiamo con α_1 il tratto $\alpha_{[a,c]}$ e con α_2 il tratto $\alpha_{[c,b]}$. Abbiamo

$$L + \epsilon > l(\alpha) = l(\alpha_1) + l(\alpha_2) \geq r + d_g(p', q)$$

Questo e la disuguaglianza triangolare prova: $r + d_g(p', q) = L$.

2. Supponiamo ora la γ si possa definire nell'intervallo $[0, L]$. Poniamo $\gamma(t) = p_t$ $p_0 = p$, $p_L = q$. Definiamo allora il sottoinsieme

$$W = \{\zeta \in [0, L], : d_g(p, p_\zeta) + d_g(p_\zeta, q) = \zeta + d_g(p_\zeta, q)\}$$

$(p_\zeta = \gamma(\zeta))$. Abbiamo visto che $r \in W$. Sia

$$T = \sup W.$$

Dimostreremo che T appartiene ad W e poi che $T = L$.

Presa una palla geodetica chiusa $\overline{B}_s(p_T)$ di centro $p_T = \gamma(T)$ e raggio $s > 0$. fissato $\epsilon > 0$ esiste $T_\epsilon \in [T - \epsilon, T) \cap S$ Allora $d_g(p_T, p_{T_\epsilon}) < \epsilon$.

$$d_g(q, p_{T_\epsilon}) + d_g(p, p_{T_\epsilon}) = d(p, q)$$

Ma

$$d_g(q, p_T) \leq d_g(q, p_{T_\epsilon}) + d_g(p_T, p_{T_\epsilon}) \leq d_g(q, p_{T_\epsilon}) + \epsilon = d(p, q) - d_g(p, p_{T_\epsilon}) + \epsilon$$

Facendo tendere ϵ a zero abbiamo

$$d_g(p, q) \leq d_g(p, p_T) + d(p_T, q).$$

L'uguaglianza segue dalla disuguaglianza triangolare. Quindi

$$T \in W.$$

Supponiamo ora $T \leq L$, applicando la prima parte del lemma a p_T e q. troviamo allora un punto sulla sfera S_s un punto p' tale che $d_g(p', p_T) + d_g(p', q) = d(p_T, q)$. Inoltre esiste β geodetica minimizzante parametrizzata dalla lunghezza d'arco che connette p_T e p'. Le uguaglianze:

$$d(p, q) = d(p, p_T) + d(p_T, q) = d(p, p_T) + d(p_T, p') + d(p', q)$$

e la disuguaglianza

$$d(p, q) \leq d(p, p') + d(p', q)$$

ci dicono che

$$d(p, p') \geq d(p, p_T) + d(p_T, p')$$

e quindi $d(p, p') = d(p, p_T) + d(p_T, p')$. Consideriamo la composizione sei tratti $\gamma(t)$ e $\beta(t)$. Se i vettori $\gamma'(T)$ e $\beta'(0)$ non fossero dipendenti la curva composta non sarebbe $\mathscr{C}^1$. Localmente, in un intorno di P_T, le uniche curve minimizzanti sono le geodetiche regolari (si potrebbe anche usare Whitehead o più semplicemente una palle geodetica). In conclusione abbiamo $\beta(s) = \gamma(T + s)$ e quindi una contraddizione.

□

Le osservazioni della precedente dimostrazione provano la seguente

Proposizione 4.2.6.6. *Sia $\gamma : [0, L] \to M$ una geodetica minimizzante e parametrizzata con la lunghezza d'arco: $l(\gamma) = L$. Allora per ogni $T \in (0, L)$ il tratto $\gamma_| t[0, T]$ è l'unica geodetica minimizzante che connette $\gamma(0)$ e $\gamma(T)$.*

Dimostrazione. Se non fosse unica avremmo una curva minimizzante avente due tratti regolari, ma non $\mathscr{C}^1$ in T. □

Dimostrazione. (del teorema di Hopf Rinow). Da 1) segue ovviamente 2). Da 2) , per il lemma 66, esiste una geodetica minimizzante che congiunge p ad ogni punto q.. Allora i dischi chiusi della distanza geodetica, $\overline{D}_r(p) = \{q \in M : d(p,q) \leq r\}$, di centro p sono l'immagine di $\exp_p \overline{U_r}$, le palle geodetiche. Queste ultime sono sono compatte. Allora d_g è completa (la dimostrazione della completezza della retta reale, ogni successione di Cauchy è limitata quindi è contenuta in un disco compatto, allora ammette una sottosuccessione convergente e quindi lei stessa converge), quindi da 2) segue 3). Vediamo come da 3) segue 1). Prendiamo un punto $q \in M$ e $v \in T_{M,q}$ supponiamo che la geodetica $\gamma(t) = \exp_q(tv)$ $||v|| = 1$ sia definita in $[0,T)$, $0 < T \leq +\infty$. Allora se t_n è una qualunque successione $\lim_{n\to\infty} t_m = T$. Abbiamo

$$d_g(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq |t_n - t_m|$$

$||\gamma(t_n)||$ è di Cauchy in M. convergente per ipotesi di completezza. Questo vale per ogni successione, e permette di estendere con continuità la γ ad una funzione $\gamma : [0,R] \to M$. Ne segue che $\gamma'[0,R) \subset\subset T_M$, applicando il risultato sulle equazioni differenziali ordinarie γ si estende. (Naturalmente si può concludere con un argomento di prolungamento delle geodetiche più diretto).

Il lemma 66 prova infine l'esistenza di una geodetica minimizzante congiungente p e q. □

4.3 Variazione seconda e campi di Jacobi

Nelle precedenti sezioni abbiamo visto che localmente le geodetiche sono minimi per la lunghezza e dell'energia e in generale punti critici. È sensato chiederci se possiamo definire l'analogo dell'hessiano. Per questo calcoleremo la variazione seconda dell'energia di una geodetica. La curvatura assumerà una particolare importanza.

4.3.1 Variazione seconda dell'energia

Sia $\gamma(t) : [a.b] \in M$ una geodetica parametrizzata con la lunghezza d'arco, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Fissiamo una base una base ortonormale di campi paralleli

$$E_1(t) = \gamma'(t), ..., E_m(t),$$

lungo γ. Se $Y(t)$ è un campo definito lungo γ porremo $Y' = \nabla_{\frac{d}{dt}} Y$. Si noti che $Y(t) = \sum_i y_i(t) E_i$ allora

$$Y' = \sum_i y_i(t) E_i$$

Riprendendo le nostre notazioni sia $F(t, s)$ una funzione regolare

$$F : [a, b] \times (-\sigma, \sigma) \to M.$$

Fissato s consideriamo la curva (*variazione*)

$$\gamma_s(t) = F(t, s).$$

e inoltre $\gamma_0(t) = \gamma$. Posto

$$E(s, t) = (\gamma_s'(t), \gamma_s'(t)) = (\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t})$$

abbiamo la variazione dell'energia funzione energia $\mathcal{E}(s) = \int_a^b bE(s, t)dt$ dove $E(0) = b - a$.

Abbiamo già visto che

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E(s, t)}{\partial s} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t})$$

Vogliamo calcolarne la derivata seconda per $s = 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(0, t)}{\partial s^2} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t})_{s=0} + (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s})_{s=0}.$$

Ora se indichiamo con $Y = Y(t) = \frac{\partial F}{\partial s}(s, 0)$ il campo tangente alla variazione abbiamo:

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s})_{s=0} = (Y'(t), Y'(t)) = ||Y'(t)||^2.$$

Per invertire l'ordine delle derivate nel primo termine necessitiamo del tensore di curvatura:

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}) + (R(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t})\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t})$$

Quindi:

$$(R(\frac{\partial F}{\partial s},\frac{\partial F}{\partial t})\frac{\partial F}{\partial s},\frac{\partial F}{\partial t})_{s=0}=(R(Y,\gamma')Y,\gamma')=r(Y,\gamma',Y,\gamma'),$$

mentre

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial F}{\partial s},\frac{\partial F}{\partial t})_{s=0}=\frac{\partial(\frac{\partial F}{\partial t},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial F}{\partial s})}{\partial t}_{s=0}-(\frac{\partial F}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial F}{\partial t})_{s=0}.$$

Abbiamo

$$\frac{\partial(\frac{\partial F}{\partial t},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial F}{\partial s})}{\partial t}_{s=0}=\frac{d(\gamma',\nabla_Y Y)}{dt}$$

e

$$(\frac{\partial F}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial F}{\partial t})_{s=0}=(Y,\nabla_{\frac{d}{dt}}\gamma')=0$$

perchè γ è geodetica. Quindi:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2E(0,t)}{\partial s^2}=\frac{d(\gamma',\nabla_Y Y)}{dt}+(Y'(t),Y'(t))+(R(Y,\gamma')Y,\gamma').$$

Integrando otteniamo:

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}''(0)=((\nabla_Y Y)(b),\gamma'(b))-(\nabla_Y Y(a),\gamma'(a))+\int_a^b(Y'(t),Y'(t))+(R(Y,\gamma')Y,\gamma')dt$$

Se la variazione fissa i punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ o se i campi $Y(a)=Y(b)=0$, allora $(\nabla_Y Y)(b)=\nabla_{Y(0)}Y=\nabla_{\underline{0}}Y=0$ e $(\nabla_Y Y)(a)=0$. Quindi abbiamo soltanto

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}''(0)=\int_a^b(Y'(t),Y'(t))+(R(Y,\gamma')Y,\gamma')dt.$$

In questo caso essendo

$$0=\int_a^b(Y'(t),Y(t))'=\int_a^b(Y''(t),Y(t))+(Y'(t),Y'(t))dt$$

abbiamo anche (utilizzando simmetrie di R)

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}''(0)=-\int_a^b(Y''+R(Y,\gamma')\gamma',Y)\tag{4.22}$$

Se abbiamo una doppia variazione che lascia fissi i punti agli estremi

$$F(t,s,u)$$

e posto

$$Z=\frac{\partial F}{\partial u}$$

vogliamo calcolare:

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}(s,u)}{\partial s\partial u}_{(0,0)}.$$

Con
$$\mathcal{E}(s,u) = \int_a^b ||\gamma'(t,s,u)||^2 dt.$$
Ora dato che $(0,0)$ è un punto critico abbiamo che 4.22 è la forma quadratica dell'hessiano. Polarizzando la forma quadratica abbiamo:
$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(s,u)}{\partial s \partial u}(0,0) = \int_a^b (Y', Z') - R(Y,\gamma')\gamma', Z) = -\int_a^b (Y'' + R(Y,\gamma')\gamma', Z). \tag{4.23}$$

Questo ci porta a definire una forma hessiana sullo spazio infinito dimensionale dei campi lungo γ nulli agli estremi:
$$H : T_{\Omega_{\gamma,p,q}} \times T_{\Omega_{\gamma,p,q}} \to \mathbb{R} \tag{4.24}$$
$$H(Y,Z) = \int_a^b (Y', Z') - R(Y,\gamma')\gamma', Z) = -\int_a^b (Y'' + R(Y,\gamma')\gamma', Z) \tag{4.25}$$

4.3.2 Il teorema di Myers

Nella prossima sessione studieremo più in dettaglio l'hessiano dell'energia. Per ora diamo la seguente applicazione topologica:

Teorema 4.3.2.1. di Myers *Sia (M,g) una varietà Riemanniana completa. Supponiamo che la curvatura di Ricci sia limitata da basso dalla metrica, cioè, esiste un numero reale $k > 0$ tale che*
$$ric(X,X) \geq kg(X,X)$$
per ogni vettore X di M, allora M è compatta.

Dimostrazione. Basta vedere che (M, d_g) dove d_g è la distanza geodetica è uno spazio metrico limitato e quindi che le geodetiche minimali hanno una lunghezza limitata. Infatti questo implica che M è immagine di un disco compatto attraverso la mappa esponenziale. Sia $\gamma : [0,L] \to M$ una geodetica minimale di lunghezza L, che vogliamo stimare. Fissiamo una base ortonormale di campi paralleli
$$E_1(t) = \gamma'(t), E_2(t), ..., E_m(t),$$
lungo γ. Definiamo, per $i > 1$, $Y_i = sin(\frac{\pi}{L}t)E_i(t)$, si noti che Y_i si annulla agli estremi $\gamma(0)$ e $\gamma(L)$. Dato che la curva è minimale: $H(Y_i, Y_i) \geq 0$ e anche
$$0 \leq \sum_i H(Y_i, Y_i) = \sum - \int_0^L (Y_i'', Y_i) - R(Y_i, \gamma')\gamma', Y_i) =$$
$$= -\int_0^L (sin^2(\frac{\pi}{L}t) ric(\gamma', \gamma') + \sum_i (Y_i'', Y_i)) dt$$
e quindi
$$\int_0^L (sin^2(\frac{\pi}{L}t) ric(\gamma', \gamma') dt \leq -\sum \int_0^L (Y_i'', Y_i) dt$$

Per ipotesi $ric(\gamma', \gamma') \geq k(\gamma', \gamma') = r$ quindi

$$k \int_0^L (sin^2(\frac{\pi}{L}t) = k\frac{L}{2} \leq -\sum \int_0^L (Y_i'', Y_i)dt$$

Ma $Y_i'' = -\frac{\pi}{L^2}Y_i$ perché Y_i è parallelo. Allora $(Y'', Y) = -\frac{\pi^2}{L^2}sin^2(\frac{\pi}{L}t)$ e

$$-\int_0^L (Y_i'', Y_i)dt = \frac{\pi^2}{L^2}\int_0^L sin^2(\frac{\pi}{L}t)dt = \frac{\pi^2}{2L}.$$

Sommando i vari contributi troviamo la disuguaglianza:

$$kL \leq (m-1)\frac{\pi^2}{L}$$

da cui

$$L^2 \leq \frac{(m-1)\pi^2}{k}.$$

□

Corollario 4.3.2.2. *Sia (M, g) nelle stesse ipotesi del teorema di Myers 4.3.2.1 allora il gruppo fondamentale di M è finito.*

Dimostrazione. Sia $p : M' \to M$ il rivestimento universale di M. Applicando 4.3.2.1 ad (M', p^*g) (che soddisfa alle stesse condizioni) abbiamo che M' è compatto: allora le fibre di p sono discrete e compatte e quindi sono insiemi finiti. □

4.3.3 Campi di Jacobi

Riprendendo a studiare la forma H definita in 4.25 abbiamo che una geodetica è certamente minimale (rispetto alle variazioni in $\Omega_{p,q}$, (rispetto a variazioni omotopiche che lasciano fisso i punti estremi) se H è definita positiva. Al variare del parametro s abbiamo allora una famiglia forme H_s definite lungo la geodetica $\gamma : [a, s] \to M$. Quando la geodetica smette di essere minimale la forma smette di essere definita, e nel momento di passaggio, dovremo avere dei campi del $kerH_s$. I vettori del $Y \in \ker H$ la nullità soddisfano $(\int_a^b (Y'' + R(Y, \gamma')\gamma', Z) = 0$ per ogni Z e quindi all' **equazione di Jacobi**

$$Y'' + R(Y, \gamma')\gamma' = 0. \tag{4.26}$$

Diamo allora la seguente

Definizione 4.3.3.1. *Un campo $Y(t)$ definito lungo una geodetica ci chiama* **campo di Jacobi** *se soddisfa all'equazione di Jacobi 4.26*

Nota 4.3.3.2. *I campi di Jacobi danno elementi di $KerH_s$ se e solo se si annullano agli estremi.*

L'equazione di Jacobi è ordinaria del secondo ordine e lineare. Fissati due vettori nel tangente di $p = \gamma(a)$ $v, w, \in T_p)$ esiste unico un campo di Jacobi Y tale che $Y(a) = v$ $Y'(a) = w$. La linearità permette di estendere le soluzione dell'equazione di Jacob ad ogni valore per cui la geodetica è definita. Abbiamo allora

Proposizione 4.3.3.3. *L'insieme dei campi di Jacobi è uno spazio vettoriale di dimensione* $2m$, $m = \dim M$.

Se $\gamma(t)$ è una geodetica allora $Y(a,b) = (at+b)\gamma'(t)$ è un campo di Jacobi lungo $\gamma(t)$., infatti abbiamo $Y'' = 0$ e $r(\gamma',\gamma',\gamma',\gamma') = 0$, mentre $Y(a,b)(0) = bv$, $Y'(a,b)(0) = av$ dove $v = \gamma'(0)$ Abbiamo inoltre

Lemma 67. *Se Y è un campo di Jacobi di γ e $Y(0) = u$ e $Y'(0) = w$ sono ortogonali a $v = \gamma'(0)$ avremo che $(Y'(t), \gamma'(t)) = 0$ per ogni $t \in [a,b]$ In altre parole il campo Y è normale a γ. Inoltre $Y'(t)$ è normale a γ.*

Dimostrazione. Consideriamo poniamo $f(t) = (Y(t), \gamma'(t))$ si ha $f(0) = 0$ e $f'(t) = (Y'(t), \gamma'(t))$ $(\gamma'' = 0)$, allora $f'(0) = 0$. Inoltre

$$f''(t) = (Y'(t), \gamma''(t)) + (Y''(t), \gamma'(t)) = r(Y(t), \gamma'(t), \gamma'(t), \gamma'(t)) = 0,$$

allora $f(t) = f'(t) = 0$. □

Abbiamo allora

Proposizione 4.3.3.4. *Lo spazio dei campi di Jacobi normali a γ ha dimensione $2m-2$. Ogni campo di Jacobi Y si ha una decomposizione ortogonale*

$$Y = (at+b)\gamma'(t) + N$$

con N campo di Jacobi normale a γ.

Se Y e Z sono di Jacobi abbiamo la forma

$$L(Y,Z) = (Y,Z') - (Z,Y') \tag{4.27}$$

non dipende dal dal punto infatti:

$$\frac{d}{dt}((Y,Z') - (Z,Y')) = (Y,Z'') - (Y'',Z) = r(Z,\gamma',\gamma',Y) - r(Y,\gamma',\gamma',Z) = 0$$

Proposizione 4.3.3.5. *Sia J lo spazio vettoriale dei campi di Jacobi definiti lungo γ. La forma $L : J \times J \to \mathbb{R}$ definisce una forma simplettica (cioè antisimmetrica) su J.*

4.3.4 Variazioni geodetiche

Vogliamo dare ora un metodo per la produzione di campi di Jacobi.

Definizione 4.3.4.1. *Una variazione geodetica è un'applicazione $F : [a,b] \times [c,d] \to M$ tale che $F(t,s) = \gamma_s(t)$ è geodetica per ogni s*

Osserviamo dapprima che se $F(t,s) = \gamma_s(t)$ è geodetica per $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ per ogni s. Se

$$Y(t) = \frac{\partial F}{\partial s}_{s=0}$$

allora

$$Y'' = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial t} + R(\gamma', Y)\gamma' = -R(Y, \gamma')\gamma'.$$

Quindi ogni variazione geodetica definisce campi di Jacobi. Per il viceversa si consideri dapprima una geodetica $\gamma(t) = exp_p(tv)$ $||v|| = 1$ definita in $[0, L]$ con L sufficientemente piccolo tale che γ sia minimale. Supponiamo esista un intorno $\mathcal{U}$ di $\gamma([0, L))$ tale che ogni coppia punti di $\mathcal{U}$ si possa connettere minimalmente. Posto $q = \gamma(L)$ di prendano due curve $a(s)$ e $b(s)$ definite per $[0, \sigma]$ a valori in U tali che $a(0) = p$ e $b(0) = q$. Costruiamo allora l'unica geodetica (minimale) $\gamma_s(t)$ tali che $\gamma_s(0) = a(s)$ e $\gamma_s(L) = b(s)$ (la velocità di tale geodetiche è normalizzata in modo da essere definite in$[0, L]$). Posto $F(t, s) = \gamma_s(t)$ abbiamo un campo di Jacobi $Y(t) = \frac{\partial F}{\partial s}_{s=0}$ tale che $Y(0) = a'(0)$ e $Y(L) = b'(0)$.

Sia J lo spazio vettoriale dei campi di jacobi lungo γ si consideri ora l'applicazione lineare:

$$f : J \to T_p \times T_q$$
$$f(Y) = (Y(0), Y(L))$$

La precedente costruzione mostra che tale applicazione è suriettiva: per ogni coppia $(v, w) \in T_p \times T_q$ si scelgano le curve con $a'(0) = v$ *e* $b'(L) = w$) per ragion di dimensioni è allora un isomorfismo e ogni campo di Jacobi in [0,L] è definito in tale modo. Ora se la geodetica γ si prolunga $\gamma : [0, L'] \to M$ per compattezza esiste un σ' tale che per $s < \sigma'$ le γ_s definite precedentemente si prolungano per $t \in [0, L']$ e le variazioni geodetiche $F(t, s) = \gamma_s(t)$ definisce tutti campi di Jacobi lungo $\gamma : [0, L'] \to M$.

4.3.5 Punti coniugati : il differenziale della mappa esponenziale

Cominciamo con una definizione

Definizione 4.3.5.1. *Siano p e q due punti di una varietà Riemanniana (M, g), sia $\gamma : [0, L] \to M$ una geodetica tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma(L) = q$. Diremo che p e q sono coniugati da γ se esiste un campo di Jacobi $Y \neq 0$ definito lungo γ tale che si annulla agli estremi: $Y(0) = 0$ e $Y(L) = 0$. L'indice di coniugazione è la dimensione dello spazio vettoriale $J_{p,q} = \{Y \in J : \; Y(0) = Y(L) = 0\}$. Diremo che p e q sono coniugati se sono coniugati da qualche geodetica.*

Supponiamo per semplicità (M, g) completa, vogliamo studiare ancora la mappa esponenziale,

$$\exp_p : T_p \to M$$

Poniamo $q = \; exp_p(v)$ e sia $\gamma(t) = exp(tv) : [0, 1] \in M$ la corrispondente geodetica. Abbiamo la seguente

Proposizione 4.3.5.2. *Il differenziale della mappa esponenziale in v $D_{exp_p,v} : T_v \to T_q$ è u isomorfismo se e solo se q non è coniugato a p.*

Dimostrazione. Identifichiamo T_v e T_p se w è in T_p la curva $v + sw$ definisce il vettore tangente al punto $v \in T_p$. Allora la variazione geodetica $F(t, s) = \exp t(v + sw)$ definisce un campo di Jacobi Y. Per costruzione

$$D_{exp_p,v}(w) = Y(L)$$

Quindi q è coniugato da γ se e solo il differenziale della mappa esponenziale in v è nullo. □

Nota 4.3.5.3. *Nella dimostrazione della precedente proposizione abbiamo visto che si ha un isomorfismo tra* $\mathrm{Ker}(D_{exp_p,v}) = J_{p,q}$. *Di più i campi di* $J_{p,q}$ *sono normali. Per vedere questo decomponiamo* $Y = (at+b)\gamma' + N$. *Entrambi le componenti si devono allora annullarsi agli estremi. Ma allora* $b\gamma'(0) = 0$ *e* $(aL+b)\gamma'(L) = 0$ *quindi* $a = b = 0$ *perchè* $\gamma'(t)$ *non è nullo. Da 67 abbiamo che anche vettore* $w = Y'(0)$ *deve essere normale a* $\gamma'(0) = v$.

Infine notiamo che il lemma di Gauss si può reinterpretare della condizione di normalità dei campi di Jacobi: se $(v, w) = 0$ *e* $Y \in J$ *di Jacobi lungo* $\gamma(t) = \exp(tv)$ *tale che* $J(0) = 0$ *e* $J'(0) = w$ *allora* $J(t)$ *è ortogonale a* $\gamma'(t)$, *ma* $J'(t) = D(exp_{p,tv}w)$.

4.3.6 Applicazione il teorema di Cartan-Hadamard

Supporremo che la curvatura sezionale sia non positiva: $r(Z, X, X, Z) \leq 0$ per ogni vettore X e Z. Se Y è di Jacobi con $Y(0) = 0$, ma $Y'(0) \neq 0$ poniamo $g(t) = (Y'(t), Y(t))$. Dall'equazione di Jacobi e otteniamo $(Y'', Y) = -r(Y, \gamma', \gamma', Y) \geq 0$ e quindi $g'(t) = (Y', Y)' = (Y'', Y) + (Y', Y') \geq 0$ si ha $g'(0) > 0$ e $g(0) = 0$. In particolare e' una funzione monotona e strettamente crescente in un intorno di 0. Quindi $g(t) > 0$, per $t > 0$ in particolare $Y(t) \neq 0$ per ogni $t > 0$, allora nessun campo di Jacobi che si annulla in p si annulla in nessun altro punto. Quindi nessuna coppia di punti è mutualmente coniugata. Ne segue che differenziale della mappa esponenziale è ovunque un isomorfismo. Quando M è completa abbiamo un risultato ancora più forte:

Teorema 4.3.6.1. di Cartan-Hadamard *Supponiamo* (M, g) *completa e connessa Se la curvatura sezionale di* (M, g) *è non-positiva allora* $exp_p : T_p \to M$ *è il rivestimento universale di* M.

Dimostrazione. Consideriamo $h = \exp_p : T_p \to M$ dobbiamo dimostrare che è un rivestimento topologico. Sappiamo che h è suriettiva perchè M è completa e che Il differenziale di h è un isomorfismo in ogni punto perchè ha curvatura sezionale negativa. Consideriamo allora su T_p la metrica $g' = h^*g$. I raggi per l'origine (con la parametrizzazione lineare) sono geodetiche per la metrica g' : in un intorno di ogni punto la metrica g e g' sono la stessa metrica. Questo prova che (T_p, g') è metrica completa. Allora il teorema segue dalla seguente:

Proposizione 4.3.6.2. *Siano* (N, g') *e* (M, g) *due varietà* $h : M \to N$ *un applicazione suriettiva che sia una isometria locale: cioè per ogni* $p \in N$ v *e* $w \in T_p$*:*

$$g(Dh_p(v), Dh_p(w)) = g'(v, w).$$

Se (N, g') *è completa allora* h *è un rivestimento.*

Dimostrazione. Dal teorema della funzione inversa h è un diffeomorfismo locale e quindi una mappa aperta. Se $q \in N$ è un punto, la sua fibra $h^{-1}p = \{q_i\}_{i \in I}$ ha allora la topologia discreta. Fissiamo un $r > o$ e una palla geodetica $U = \exp_q(U(r))$ $k = \exp_q : U(r) \to U$ è un diffeomorfismo. Consideriamo analogamente $U_i = \exp_{q_i} U_i(r)$, $U_i(r) \subset T_{q_i}$ e le mappe esponenziali $k_i : U_i(r) \to U_i$.

Abbiamo allora dei diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccc} U_i(r) & \xrightarrow{k_i} & U_i \\ \downarrow {\scriptstyle \equiv\ D(h)_q} & & \downarrow {\scriptstyle h} \\ U(r) & \xrightarrow{k} & U \end{array}$$

Per costruzione $h \cdot k_i = k \cdot D(h)_q$. Ora k è biettiva mentre k_i è suriettiva per costruzione. Dato che $h \cdot k_i$ è biettiva ne segue che k_i e h devono essere entrambe iniettive. Quindi le k_i e h_{U_i} sono diffeomorfismi.

Osserviamo ora che

$$h^{-1}(U) = \bigcup_i U_i.$$

L'inclusione $h^{-1}(U) \supset \cup U_i$ segue immediatamente dal precedente diagramma. Supponiamo ora $a \in h^{-1}(U)$ e $b = h(a) \in U$. Sia $w \in T_b$ tale che la geodetica $\gamma : [0, L] \to M$ che connette b con q, $\gamma(0) = b$ e $\gamma(L) = q$, allora $L < r$. Sia $\gamma'(0) = w$, $||w|| = 1$. Sia $v = (Dh_b)^{-1}(w) \in T_a$ e sia β la geodetica tale che $\beta(0) = b$ e $\beta'(0) = v$ la β si prolunga per ogni valore reale perché M è completa. Per costruzione $h \cdot \beta = \gamma$ allora $h(\beta(L)) = \gamma(L) = q$. Quindi $\beta(L) = q_i$ per qualche valore $i \in I$. Considerando la geodetica $\overline{\beta}$ che percorre β in senso inverso abbiamo che $\overline{\beta}(L) = a \in U_i$, perché $L \leq r$. La stessa osservazione dimostra che $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$ infatti se $a \in U_i \cap U_j$ la geodetica $\overline{\beta}(L) = p_i = p_j$ e $U_i = U_j$. Allora $h^{-1}(U) = \cup U_i$ dove le intersezioni $U_i \cap U_j = \emptyset$ con $i \neq j$. Inoltre $h : U_i \to U$ sono omeomorfismi. Essendo h suriettiva abbiamo che h è un rivestimento. □

□

4.3.7 Teorema dell'indice di Morse

Per concludere riportiamo il famoso teorema dell'indice di Morse. Per una dimostrazione si veda [7] capitolo 15 pagine 83-87. Sia (M, g) una varietà riemanninana $\gamma : [0, L] \to M$ una geodetica e H la forma

$$H : T_{\Omega_{\gamma,p,q}} \times T_{\Omega_{\gamma,p,q}} \to \mathbb{R}$$

ottenuta dalla variazione seconda dell'energia 4.24. Ricordiamo che l'indice di H è la dimensione massima in cui H è definita negativa.

Teorema 4.3.7.1. *L'indice λ della forma H è finito. Inoltre se $p_i = \gamma(t_i)$ sono i punti coniugati a p in $(0, L)$ e ν_i è l'indice di coniugazione di p_i si ha $\lambda = \sum_i \nu_i$.*

Abbiamo allora il seguente corollario:

Corollario 4.3.7.2.

La geodetica $\gamma : [0, L] \to M$ è minimale se e solo se in $(0, L)$ non ci sono punti coniugati.

L'insieme dei punti coniugati è finito.

Capitolo 5

Appendice sull'algebra esterna

La definizione del prodotto esterno data in §2.1 è piuttosto concreta. Tuttavia per dimostrare le proprietà fondamentali del prodotto esterno (Teorema 20) è opportuno partire da una definizione differente più astratta (Def. 5.0.7.3). Ciò permette di dimostrare le proprietà algebriche del prodotto esterno in modo meno laborioso. Alla fine si verifica che le due definizioni coincidono e si dimostra la Prop. 21.

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione n ed m rispettivamente. Indichiamo con $V \otimes W$ lo spazio delle forme bilineari su $V^* \times W^*$. Se $v \in V$ e $w \in W$ indichiamo con $v \otimes w$ la forma bilineare

$$v \otimes w : V^* \times W^* \to \mathbb{R} \qquad (v \otimes w)(\varphi, \psi) = \varphi(v) \cdot \psi(w).$$

Esercizio 60. *Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base di V e $\{f_1, \ldots, f_m\}$ è una base di W, allora $\{e_i \otimes f_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ è una base di $V \otimes W$. (Suggerimento: ragionare come nel Lemma 19.)*

Esercizio 61. *L'applicazione*

$$\otimes : V \times W \to V \otimes W \qquad (v, w) \mapsto v \otimes w \tag{5.1}$$

è bilineare.

Gli elementi di $V \otimes W$ vengono alle volte chiamati *tensori*. Quelli che stanno nell'immagine dell'applicazione (5.1), cioè quelli della forma $v \otimes w$ sono detti tensori *scomponibili* (o *decomponibili*).

L'applicazione bilineare (5.1) gode della seguente proprietà universale.

Lemma 68 (Proprietà universale del prodotto tensoriale)**.** *Siano V, W ed U degli spazi vettoriali reali di dimensione finita. Sia $b : V \times W \to U$ una applicazione bilineare. Allora esiste una unica applicazione lineare $\lambda : V \otimes W \to U$ tale che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\otimes"'] & U \\ V \otimes W \arrow[ur, dotted, "\lambda"'] & \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

commuti.

Dimostrazione. Fissiamo una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V ed una base $\{f_1, \dots, f_m\}$ di W. Sappiamo che $\{e_i \otimes f_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ è una base di $V \otimes W$. Dunque esiste un'unica applicazione lineare $\lambda : V \otimes W \to U$ tale che

$$\lambda(e_i \otimes f_j) := b(e_i, f_j).$$

Per costruzione $\lambda \circ \otimes = b$ sulle coppie della forma (e_i, f_j). Poiché b e l'applicazione (5.1) sono entrambe bilineari segue immediatamente che $\lambda \circ \otimes = b$ su tutto $V \times W$. Dunque λ fa commutare il diagramma. D'altronde λ è l'unica applicazione con questa proprietà: se μ è un'altra applicazione che fa commutare il diagramma si ha $\mu(e_i \otimes f_j) = b(e_i, f_j) = \lambda(e_i \otimes f_j)$. Ma allora $\mu = \lambda$ perché $\{e_i \otimes f_j\}$ è una base di $V \otimes W$. □

Ovviamente la costruzione che abbiamo appena descritto si può estendere al prodotto tensoriale di più di due spazi vettoriali.

In realtà la costruzione del prodotto tensoriale si può fare in contesti molto più generali di quello indicato, che tuttavia è più che sufficiente per i nostri scopi. Il lettore interessato può consultare per esempio [5].

Ci interessa soprattutto il prodotto tensoriale di V^* con sé stesso. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Se p è un intero positivo poniamo

$$T^p V^* = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{p \text{ volte}}.$$

Dal fatto che $(V^*)^* = V$ segue che $T^p V^*$ è lo spazio vettoriale delle forme p-lineari su V non necessariamente antisimmetriche. Poniamo anche $T^0 V^* = \mathbb{R}$. Se $t \in T^p V^*$ ed $s \in T^q V^*$ (con $p, q > 0$) definiamo $t \otimes s \in T^{p+1} V^*$ mediante la formula

$$\big(t \otimes s\big)(v_1, \dots, v_{p+q}) = t(v_1, \dots, v_p) \cdot s(v_{p+1}, \dots, v_{p+q}).$$

Se $p = q = 1$ questa definizione si riduce alla (5.1). Se $p = 0$ definiamo $t \otimes s := t \cdot s$. L'applicazione $\otimes : T^p V^* \times T^q V^* \to T^{p+q} V^*$ è bilineare. Poniamo

$$T^* V^* = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p V^*$$

ed estendiamo per bilinearità $\otimes$ ad una operazione su $T^* V^*$.

Esercizio 62. *Verificare che $(T^* V^*, \otimes)$ è un'algebra associativa sul campo dei numeri reali.*

Ovviamente l'algebra $T^* V^*$ si guarda bene dall'essere commutativa.

Esercizio 63. *Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V e sia $\{e^1, \dots, e^n\}$ la base duale. Dimostrare che le forme p-lineari $e^{\otimes I} := e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}$ al variare di $I = (i_1, \dots, i_p)$ fra tutti i p-indici formano una base di $T^p V^*$. (Suggerimento: applicare l'esercizio 60.)*

Sia $\sigma \in \mathfrak{S}(p)$. Vogliamo definite un operatore lineare

$$L_\sigma : T^p V^* \to T^p V^*$$

che agisce sugli elementi scomponibili secondo la regola

$$L_\sigma(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p) = \varphi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(p)}.$$

Per verificare che un tale operatore esiste applichiamo la proprietà universale del prodotto tensoriale. Definiamo innanzitutto una applicazione bilineare

$$b : \big(V^*\big)^p \to T^p\, V^* \qquad b(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) := \varphi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(p)}.$$

Questa applicazione è multilineare. Dunque, per la properietà universale del prodotto tensoriale, esiste un unico operatore lineare $\lambda : T^p\, V^* \to T^p\, V^*$ tale che $\lambda(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p) = b(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$. A questo punto basta porre $L_\sigma := \lambda$.

Esercizio 64. *Dimostrare che per $\sigma \in \mathfrak{S}(p)$, $t \in T^p\, V^*$ e $v_1, \ldots, v_p \in V$ si ha*

$$L_\sigma t(v_1, \ldots, v_p) = t(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}).$$

Esercizio 65. *Per $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(p)$ si ha $L_\sigma \circ L_\tau = L_{\sigma\tau}$.*

Poniamo ora

$$A_p : T^p\, V^* \to T^p\, V^* \qquad A_p = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p)} (-1)^\sigma L_\sigma.$$

L'operatore A_p si chiama antisimmetrizzatore. Spesso scriveremo semplicememnte A anziché A_p.

Esercizio 66. *Per $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(p)$ si ha $A_p \circ L_\tau = L_\tau \circ A_P = (-1)^\sigma A_p$.*

Esercizio 67. *Si ha $A_p^2 = p! A_p$.*

Proposizione 69. *Sia α una applicazione p-lineare $V^p \to \mathbb{R}$, cioè un elemento di $T^p\, V^*$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti: (1) α è antisimmetrica (cioè $\alpha \in \Lambda^p\, V^*$); (2) $L_\sigma \alpha = (-1)^\sigma \alpha$ per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}(p)$; (3) $A_p(\alpha) = p!\alpha$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\alpha \in \Lambda^p\, V^*$. Fissiamo una base $\{e_i\}$ di V e scriviamo α nella corrispondente base di $T^p\, V^*$:

$$\alpha = \sum_I \alpha_I e^{\otimes I}$$

(dove si somma su tutti i p-indici). Siano i, j due numeri $1 \leq i < j \leq p$ e sia $\sigma = (ij)$ la trasposizione corrispondente. Supponiamo per semplicità di notazione che $i = 1$ e $j = 2$. Allora

$$L_\sigma \alpha = \sum_I \alpha_I e^{i_2} \otimes e^{i_1} \otimes e^{i_3} \otimes \cdots e^{i_p}.$$

D'altronde siccome $\alpha \in T^p\, V^*$

$$\alpha_I = \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}) = -\alpha(e_{i_2}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}).$$

Se $I = (i_1, \dots, i_2)$ poniamo $I' = (i_2, i_1, \dots, i_p)$. Allora

$$L_\sigma \alpha = -\sum_{I'} \alpha_{I'} e^{I'\otimes} = -\alpha.$$

Dunque $L_\sigma = (-1)^\sigma$ per tutte le trasposizioni. Ma le trasposizioni generano il gruppo simmetrico. Inoltre il segno di una permutazione è un morfismo di gruppi $\mathfrak{S}(p) \to \{\pm 1\}$. Dall'esercizio 65 segue che $L_\sigma = (-1)^\sigma$ per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}(p)$. È così dimostrato che (1) $\Rightarrow$ (2). Il viceversa è ovvio.

Supponiamo ora che valga (2). Allora

$$A_p \alpha = \sum_\sigma (-1)^\sigma (-1)^\sigma \alpha = p!\, \alpha.$$

Cioè (2) $\Rightarrow$ (3). Se invece vale (3), allora usando l'esercizio 66

$$L_\sigma \alpha = \frac{1}{p!} L_\sigma A_p \alpha = \frac{1}{p!} (-1)^\sigma A_p \alpha = (-1)\alpha.$$

Dunque (3) $\Rightarrow$ (2). □

Lemma 70. *Si ha* $T^p\, V^* = \operatorname{Im} A_P \oplus \operatorname{Ker} A_p$ *e* $\Lambda^p\, V^* = \operatorname{Im} A_p$.

Dimostrazione. Poniamo

$$P = \frac{1}{\sqrt{p!}} A_p : T^p\, V^* \to T^p\, V^*.$$

Dall'esercizio 67 segue che $P^2 = P$ (cioè P è un proiettore). Se $t \in T^p\, V^*$ allora $t = (t - Pt) + Pt$, dove $t - Pt \in \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} A_p$ e $Pt \in \operatorname{Im} A_p$. Dunque $T^p\, V^* = \operatorname{Ker} A_p + \operatorname{Im} A_p$ e la somma è diretta (p.e. per la formula di Grassmann). La seconda affermazione segue dalla condizione (3) della proposizione precedente. □

Sia $\mathfrak{I}$ l'ideale bilatero dell'algebra $T^*\, V^*$ generato dagli elementi $\varphi \otimes \varphi$ al variare di φ in V^*.

Lemma 71.

$$\mathfrak{I} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \operatorname{Ker} A_p.$$

Dimostrazione. Incominciamo dimostrando che $\mathfrak{I}$ è contenuto nella somma diretta dei nuclei. Siano $\varphi \in V^*$ e $t \in T^{p-2}\, V^*$. Poniamo

$$E = \{\sigma \in \mathfrak{S}(p) : \sigma(1) < \sigma(2)\}.$$

Indichiamo con τ la permutazione (12). Allora $\mathfrak{S}(p) = E \sqcup (\tau \cdot E)$. Pertanto (sfruttando l'esercizio 64)

$$\begin{aligned} A(\varphi \otimes \varphi \otimes t)(v_1, \dots, v_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p)} (-1)^\sigma \varphi(v_{\sigma(1)}) \cdot \varphi(v_{\sigma(2)}) \cdot t(v_{\sigma(3)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \\ = \sum_{\sigma \in E} (-1)^\sigma \varphi(v_{\sigma(1)}) \cdot \varphi(v_{\sigma(2)}) \cdot t(v_{\sigma(3)}, \dots, v_{\sigma(p)}) + \\ + \sum_{\sigma \in E} (-1)^{\tau\sigma} \varphi(v_{\tau\sigma(1)}) \cdot \varphi(v_{\tau\sigma(2)}) \cdot t(v_{\tau\sigma(3)}, \dots, v_{\tau\sigma(p)}) = \\ = \sum_{\sigma \in E} (-1)^\sigma \varphi(v_{\sigma(1)}) \cdot \varphi(v_{\sigma(2)}) \cdot t(v_{\sigma(3)}, \dots, v_{\sigma(p)}) + \\ - \sum_{\sigma \in E} (-1)^\sigma \varphi(v_{\sigma(2)}) \cdot \varphi(v_{\sigma(1)}) \cdot t(v_{\sigma(3)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = 0. \end{aligned}$$

Dunque $\varphi \otimes \varphi \otimes t \in \operatorname{Ker} A_p$. Lo stesso ragionamento vale per $t \otimes \varphi \otimes \varphi$. Ciò dimostra

$$\mathfrak{I} \subset \bigoplus_{p=0}^{\infty} \operatorname{Ker} A_p.$$

Dati $\varphi, \psi \in V^*$ osserviamo che

$$(\varphi + \psi) \otimes (\varphi + \psi) = \varphi \otimes \varphi + \psi \otimes \psi + \varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi$$

dunque $\varphi \otimes + \psi \otimes \varphi \in \mathfrak{I}$. Se $\sigma = (12)$ e $t = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_p \in T^p V^*$ allora

$$(-1)^\sigma L_\sigma t - t = -(\varphi_2 \otimes \varphi_1 + \varphi_1 \otimes \varphi_2) \otimes \varphi_3 \otimes \cdots \otimes \varphi_p.$$

Lo stesso vale per ogni altra trasposizione. Siccome $\mathfrak{S}(p)$ è generato dalle trasposizioni, segue che $(-1)^\sigma L_\sigma t - t \in \mathfrak{I}$ per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}(p)$ e per ogni $t \in T^p V^*$ (dimostrare!). Dunque

$$At - p!\, t \in \mathfrak{I} \qquad \forall t \in T^p V^*. \tag{5.3}$$

Per $t \in \operatorname{Ker} A_p$ otteniamo che $t \in \mathfrak{I}$. Ciò dimostra la seconda inclusione. $\square$

Esercizio 68. *Per ogni $t \in T^p V^*$ e $q \in T^q V^*$ si ha*

$$As \otimes At = p!\, q!\, s \otimes t \mod \mathfrak{I} \qquad A\big(As \otimes At\big) = p!\, q!\, A(s \otimes t). \tag{5.4}$$

(Suggerimento: sfruttare la (5.3).)

Ora possiamo dare una seconda definizione del prodotto esterno. Successivamente verificheremo che questa definizione coincide con quella precedente.

Definizione 5.0.7.3. *Date $\alpha \in \Lambda^p V^*$ e $\beta \in \Lambda^q V^*$ poniamo*

$$\alpha \wedge \beta := \frac{1}{p!q!} A\big(\alpha \otimes \beta\big). \tag{5.5}$$

Per esempio se $\alpha, \beta \in V^*$

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha. \tag{5.6}$$

Teorema 72. *$(\Lambda^* V^*, \wedge)$ è un'algebra associativa sul campo dei numeri reali.*

Dimostrazione. Per dimostrare l'associatività è sufficiente considerare il prodotto esterno di tre forme pure. Siano $\alpha \in \Lambda^p V^*, \beta \in \Lambda^q V^*, \gamma \in \Lambda^r V^*$.

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \frac{1}{(p+q)!\, r!} A\big((\alpha \wedge \beta) \otimes \gamma\big) = \\ &= \frac{1}{(p+q)!\, r!} A\left(\frac{1}{p!\, q!} A(\alpha \otimes \beta) \otimes \frac{1}{r!} A\gamma\right) = \\ &= \frac{1}{(p+q)!\, p!\, q!\, (r!)^2} A\big(A(\alpha \otimes \beta) \otimes A\gamma\big).\end{aligned}$$

Usando (5.4) otteniamo

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \frac{1}{p!\, q!\, r!} A\big(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma\big). \tag{5.7}$$

Nello stesso modo si dimostra che anche

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \frac{1}{p!\, q!\, r!} A\big(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma\big).$$

È così dimostrata l'associatività del prodotto (5.5). Ovviamente abbiamo sfruttato l'associatività del prodotto tensoriale $\otimes$. □

Esercizio 69. *Se $\alpha_i \in T^{p_i} V^*$, $1 \leq i \leq r$*

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r = \frac{1}{p_1! \cdots p_r!} A\big(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_r\big).$$

(Suggerimento: iterare il ragionamento fatto per dimostrare la formula (5.7).)

Esercizio 70. *Se $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in V^*$ e $v_1, \ldots, v_p \in V$ allora*

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_p(v_1, \ldots, v_p) = \det\big(\varphi_i(v_j)\big).$$

Esercizio 71. *Sia $\{e_i\}$ una base di V. Definiamo e^I come in (2.3) e il prodotto esterno come in (5.5). Allora $e^I = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}$.*

Una p-forma α che si può scrivere nel modo $\alpha = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_p$ per certi $\varphi_j \in V^*$ si chiama *semplice* o *decomponibile.*

Corollario 73. *Lo spazio vettoriale $\Lambda^p V^*$ è generato dalle forme semplici.*

Teorema 74. *Se $\alpha \in \Lambda^p V^*$ e $\beta \in \Lambda^q V^*$ allora*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \wedge \alpha.$$

Dimostrazione. Poniamo $p = \deg \alpha$, $q = \deg \beta$. Supponiamo inizialmente $p = 1$ e procediamo per induzione su q. Se anche $q = 1$, il risultato segue immediatamente da (5.6). Supponiamo poi $q > 1$ e assumiamo che

$$\alpha \wedge \gamma = (-1)^{q-1} \gamma \wedge \alpha$$

per ogni $\gamma \in \Lambda^{q-1} V^*$. Per il Cor. 73 possiamo supporre $\beta = \gamma \wedge \varphi$ con $\varphi \in V^*$. Allora

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \gamma \wedge \varphi = (-1)^{q-1}\gamma \wedge \alpha \wedge \varphi = \\ = (-1)^{q-1}\gamma \wedge (-\varphi \wedge \alpha) = (-1)^q \beta \wedge \alpha.\end{aligned}$$

Ciò dimostra la (2.9) nel caso $p = 1$ e q qualunque. Ora procediamo per induzione su p. Supponiamo che

$$\gamma \wedge \beta = (-1)^{(p-1)q}\beta \wedge \gamma$$

per ogni $\gamma \in \Lambda^{p-1} V^*$. Sia $\alpha = \gamma \wedge \varphi$ con $\varphi \in V^*$. Allora

$$\alpha \wedge \beta = \gamma \wedge \varphi \wedge \beta = (-1)^q \gamma \wedge \beta \wedge \varphi = (-1)^q(-1)^{(p-1)q}\beta \wedge \gamma \wedge \varphi = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha.$$

Ciò completa l'induzione su p. $\square$

Ora vogliamo dimostrare che il prodotto esterno definito secondo la formula (5.5) soddisfa la (2.8). Incominciamo con alcune osservazioni sulle permutazioni.

Se $\sigma \in \mathfrak{S}(p)$ e $\tau \in \mathfrak{S}(q)$ definiamo una permutazione $\sigma * \tau \in \mathfrak{S}(p+q)$ mediante la formula

$$\sigma * \tau(j) = \begin{cases} \sigma(j) & \text{se } j \leq p \\ \tau(j-p) + p & \text{se } j > p. \end{cases}$$

Esercizio 72. *L'applicazione*

$$\Phi_{pq} : \mathfrak{S}(p) \times \mathfrak{S}(q) \to \mathfrak{S}(p+q) \qquad \Phi_{pq}(\sigma, \tau) := \sigma * \tau$$

è un morfismo di gruppi iniettivo.

Indichiamo con H l'immagine di Φ_{pq}.

Lemma 75. *Ogni permutazione di $\mathfrak{S}(p+q)$ si può scrivere in modo unico come prodotto di un elemento di $\mathfrak{S}(p,q)$ e di uno di H.*

Dimostrazione. Poniamo$A = \{1, \dots, p\}$ e $B = \{p+1, \dots, p+q\}$. H è formato dalle permutazioni $\eta \in \mathfrak{S}(p+q)$ tali che $\eta(A) = A$ e $\eta(B) = B$. Data una permutazione $\eta \in \mathfrak{S}(p+q)$ scriviamo

$$\eta(A) = \{\zeta_1, \dots, \zeta_p\} \qquad \eta(B) = \{\zeta_{p+1}, \dots, \zeta_{p+q}\}.$$

Se imponiamo che $\zeta_1 < \cdots < \zeta_p$ e $\zeta_{p+1} < \cdots < \zeta_{p+q}$ allora i numeri ζ_j sono univocamente determinati. Definiamo $\zeta \in \mathfrak{S}(p+q)$ ponendo $\zeta(j) = \zeta_j$. È chiaro che ζ è una permutazione e che $\zeta \in \mathfrak{S}(p,q)$. Inoltre $\zeta(A) = \eta(A)$ e $\zeta(B) = \eta(B)$. Dunque $\gamma := \zeta^{-1}\eta \in H$. Ciò dimostra che

$$\mathfrak{S}(p+q) = \mathfrak{S}(p,q).H.$$

D'altronde se $\eta = \zeta\gamma = \zeta'\gamma'$ con $\zeta, \zeta' \in \mathfrak{S}(p,q)$ e $\gamma, \gamma' \in H$ allora $\zeta' = \zeta\gamma(\gamma')^{-1}$ dunque $\zeta(A) = \zeta'(A)$. Siccome $\zeta, \zeta' \in \mathfrak{S}(p,q)$ segue che $\zeta = \zeta'$ e $\gamma = \gamma'$. Dunque la rappresentazione è unica. $\square$

Esercizio 73. *Verificare che*

$$\left|\mathfrak{S}(p,q)\right| = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}.$$

Esercizio 74. *Siano $\sigma \in \mathfrak{S}(p)$, $\tau \in \mathfrak{S}(q)$, $t \in T^p V^*$ ed $s \in T^q V^*$. Allora*

$$L_\gamma(t \otimes s) = (L_\sigma t) \otimes (L_\tau s).$$

(Suggerimento: si può assumere che α e β siano forme semplici.)

Teorema 76. *Il prodotto esterno - definito secondo la formula* (5.5) *- soddisfa la* (2.8)*. Pertanto le due definizioni del prodotto esterno coincidono.*

Dimostrazione. Siano $\alpha \in \Lambda^p V^*$ e $\beta \in \Lambda^q V^*$.

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= \frac{1}{p!\,q!} A(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\eta \in \mathfrak{S}(p+q)} (-1)^\eta L_\eta(\alpha \otimes \beta) = \\ &= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\zeta \in \mathfrak{S}(p,q)} \sum_{\gamma \in H} (-1)^\zeta (-1)^\gamma L_\zeta L_\gamma(\alpha \otimes \beta).\end{aligned}$$

Se $\gamma = \sigma * \tau$ per l'esercizio 74 si ha

$$L_\gamma(\alpha \otimes \beta) = (L_\sigma \alpha) \otimes (L_\tau \beta) = (-1)^\gamma \alpha \otimes \beta.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= \frac{\left|H\right|}{p!\,q!} \sum_{\zeta \in \mathfrak{S}(p,q)} (-1)^\zeta L_\zeta(\alpha \otimes \beta) = \\ &= \sum_{\zeta \in \mathfrak{S}(p,q)} (-1)^\zeta L_\zeta(\alpha \otimes \beta).\end{aligned}$$

È immediato dedurre da questo la la (2.8). □

Teorema 77. *Se $\{e_i\}$ è una base di V, l'algebra esterna $(\Lambda^* V^*, \wedge)$ è generata da $e^1, ..., e^n$ con le relazioni*

$$\begin{cases} e^i e^j = -e^j e^i & \text{per } i \neq j \\ e^i e^i = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Dimostrazione. Grazie all'esercizio 71 e al Lemma 19 sappiamo già che $\{e^i\}$ è un sistema di generatori. È ovvio che le relazioni (5.8) sono soddisfatte in $\Lambda^* V^*$. Dobbiamo dimostrare che ogni altra relazione è conseguenza di queste. In termini più rigorosi dobbiamo dimostrare quanto segue. Sia F l'algebra libera sugli elementi $x_1, \dots, x_n$. Sia

$$\varphi : F \to \Lambda^* V^*$$

il morfismo di algebre tale che $\varphi(x_i) = e^i$. Dobbiamo verificare che $\operatorname{Ker}\varphi$ è l'ideale generato da

$$x_1^2, \dots, x_n^2,\ x_i x_j + x_j x_i \quad i \neq j.$$

Possiamo identificare F con l'algebra $T^* V^*$, ponendo $x_i = e^i$. Definiamo

$$\psi : T^* V^* \to \Lambda^* V^*$$

imponendo che se $t \in T^p V^*$ allora

$$\psi(t) = \frac{1}{p!} A_p t.$$

Discende dall'esercizio 68 che ψ è un morfismo. Poiché $\psi(e^i) = e^i$ ψ coincide con φ nel modello $F = T^* V^*$. Dal Lemma 71 discende che il nucleo di φ è proprio l'ideale $\mathfrak{I}$ ed è facile verificare dalla definizione che questo è generato dagli elementi $(e^1 \otimes e^1, \dots, e^n \otimes e^n$, $e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i, i \neq j$. □

Infine possiamo dimostrare la Prop 21.

Proposizione 78. *Se α e β sono forme pure e $v \in V$, allora*

$$\iota_v(\alpha \wedge \beta) = (\iota_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (\iota_v \beta). \tag{5.9}$$

Dimostrazione. Siano dati $w_1, \dots, w_{p+q-1} \in V$. Poniamo $v_1 = v$ e $v_j = w_{j-1}$ per $j > 1$. Usando (2.8) si ha

$$\begin{aligned} \iota_v(\alpha \wedge \beta)(w_1, \dots, w_{p+q-1}) &= \alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, \dots, v_{p+q}) = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q)} (-1)^\sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, ..., v_{\sigma(p+q)}). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Poniamo

$$\begin{aligned} A &= \{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q) : \sigma^{-1}(1) \leq p\} = \{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q) : \sigma(1) = 1\} \\ B &= \mathfrak{S}(p,q) \setminus A = \{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q) : \sigma(p+1) = 1\}. \end{aligned}$$

Procediamo spezzando la somma in (5.10) in due pezzi, il primo corrispondente alle permutazioni in A, il secondo a quelle in B.

$$\begin{gathered} \sum_{\sigma \in A} (-1)^\sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, ..., v_{\sigma(p+q)}) = \\ = \sum_{\sigma \in A} (-1)^\sigma \alpha(v, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, ..., v_{\sigma(p+q)}) = \\ = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(p-1,q)} (-1)^\tau (\iota_v \alpha)(w_{\tau(1)}, ..., w_{\tau(p-1)}) \beta(w_{\tau(p)}, ..., w_{\tau(p+q-1)}) = \\ = (\iota_v \alpha) \wedge \beta(w_1, \dots w_{p+q-1}). \end{gathered}$$

Veniamo alla somma su B. Se $\sigma \in B$ poniamo

$$\tau(j) = \begin{cases} \sigma(j) - 1 & \text{per } 1 \leq j \leq p \\ \sigma(j+1) - 1 & \text{per } p < j \leq p + q - 1. \end{cases}$$

Allora $\tau \in \mathfrak{S}(p, q-1)$ e $(-1)^\sigma = (-1)^p(-1)^\tau$. Inoltre l'applicazione $\sigma \mapsto \tau$ è una biiezione fra B e $\mathfrak{S}(p, q-1)$. Dunque

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in B} (-1)^\sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, ..., v_{\sigma(p+q)}) = \\
&= \sum_{\sigma \in B} (-1)^\sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}) (\iota_v \beta)(v_{\sigma(p+2)}, ..., v_{\sigma(p+q)}) = \\
&= (-1)^p \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q-1)} (-1)^\tau \alpha(w_{\tau(1)}, ..., w_{\tau(p)}) (\iota_v \beta)(v_{\tau(p+1)}, ..., v_{\tau(p+q-1)}) = \\
&= (-1)^p \alpha \wedge (\iota_v \beta)(w_1, \ldots, w_{p+q-1}).
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\iota_v(\alpha \wedge \beta)(w_1, \ldots, w_{p+q-1}) &= \sum_{\sigma \in A} (-1)^\sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, ..., v_{\sigma(p+q)}) + \\
&+ \sum_{\sigma \in B} (-1)^\sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, ..., v_{\sigma(p+q)}) = \\
&= (\iota_v \alpha) \wedge \beta(w_1, \ldots w_{p+q-1}) + (-1)^p \alpha \wedge (\iota_v \beta)(w_1, \ldots, w_{p+q-1}).
\end{aligned}$$

□

5.1 Appendice di topologia generale

Uno spazio topologico è *separabile* se esiste un sottoinsieme denso numerabile. Uno spazio topologico è a base numerabile se c'è una base della topologia numerabile. In tal caso si dice anche che X soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Lemma 79. *Ogni sottospazio di uno spazio separabile è separabile. Uno spazio metrico separabile ha base numerabile.* $\mathbb{R}^n$ *è a base numerabile.*

Ricordiamo che una varietà differenziabile soddisfa il secondo assioma di numerabilità per definizione.

Teorema 80 (Lindelöf)**.** *Se X ha una base numerabile allora ogni ricoprimento di X ammette un sottoricoprimento numerabile.*

Un m-indice Ã¨ una m-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ dove $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \geq 0$. Chiamiamo $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ *lunghezza* dell'm-indice α.

Se $f = f(x_1, \ldots, x_m)$ Ã¨ una funzione di m variabili reali a valori in $\mathbb{R}^n$ poniamo

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m! \tag{5.11}$$

$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_m^{\alpha_m} \tag{5.12}$$

Nota che

$$|h^\alpha| \leq |h|^{|\alpha|}$$

Formula di Taylor sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione liscia. Sia $x_0 \in \Omega$ e supponiamo che $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$. Allora per $|h| < \varepsilon$

$$f(x_0 + h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} h^\alpha + (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^k D^\alpha f(x_0 + th) dt \tag{5.13}$$

Bibliografia

[1] G. Bredon. *Geometry and Topology*, Graduate Texts in Math. **139**, (Springer-Verlag), New York, 1993.

[2] M. Cornalba. *Note di Geometria Differenziale.* in rete.

[3] M. Hirsch. *Differential Topology.* Graduate text in Math, **33**(Springer Verlag) (1963).

[4] W. Hurewicz. *Lectures in Ordinary Differential Equation. Books on Advanced Maths, (Dover New York) (1990).*

[5] S. Lang. *Algebra*, Graduate Texts in Math. **211**, (Springer-Verlag), New York, 2002.

[6] R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex manifolds*, North-Holland, 1985[3].

[7] J. Milnor. *Morse Theory.* Annals Math Study , **51**(Princeton University Press) (1976).

[8] F. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Graduate Texts in Math, **24**(Springer Verlag).

Gian Pietro Pirola
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia
via Ferrata 1, 27100 Pavia, Italia
`gianpietro.pirola@unipv.it`