Corso di Algebra 2 - a.a. 2015-2016

Prova scritta del 17.6.2016

Esercizio 0.1. *Sia* $P(X) = X^6 - X^4 + X^5 - X^3 - 2X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. *Determinare una fattorizzazione di* P *in irriducibili in* $\mathbb{Q}[X]$.

2. *Determinare il gruppo di Galois di* P *su* $\mathbb{Q}$.

3. *Consideriamo ora* $P \in \mathbb{F}_5[X]$. *Determinare il gruppo di Galois di* P *su* $\mathbb{F}_5$.

Risoluzione. 1. Si ha

$$P(X) = (X^2 - 1)(X^4 + X^3 - 2) = (X+1)(X-1)(X-1)(X^3 + 2X^2 + 2X + 2).$$

Il polinomio $f(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ è irriducibile su $\mathbb{Q}[X]$ grazie al criterio di Eisenstein applicato con il primo $p = 2$.

2. Il gruppo di Galois di P è il gruppo di Galois di f. Si verifica immediatamente che il discriminante di f è negativo quindi non ha radici quadrate in $\mathbb{Q}$ e pertanto il gruppo di Galois di f è isomorfo a S_3. □

3. f è irriducibile su $\mathbb{F}_5$ perché non ha radici in $\mathbb{F}_5$. Il gruppo di Galois quindi è un sottogruppo transitivo di S_3 ed è ciclico, quindi è isomorfo a $\mathbb{Z}/3$.

Esercizio 0.2. *Sia* $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. *Dire se* $q(X)$ *è risolubile per radicali.*

2. *Determinare un campo di spezzamento per* $q(X)$ *su* $\mathbb{Q}$.

3. *Determinare il gruppo di Galois di* $q(X)$ *su* $\mathbb{Q}$.

Risoluzione. 1. Osserviamo che $X^6 - 1 = (X-1)q(X)$. D'altra parte

$$X^6 - 1 = \Phi_1(X)\Phi_2(X)\Phi_3(X)\Phi_6(X) = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1),$$

dove Φ_j è il j-esimo polinomio ciclotomico. Quindi $q(X) = (X+1)(X^2+X+1)(X^2 - X + 1)$. Dunque $q(X)$ è risolubile per radicali perché $(X^2+X+1)(X^2-X+1)$ è risolubile per radicali essendo il prodotto di due polinomi di grado 2.

2. Le radici di $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$ sono le due radici terze primitive di 1, mentre le radici di $\Phi_6(X) = X^2 - X + 1$ sono le due radici seste primitive di 1. Dato che se ω è una radice sesta primitiva di 1, ω^2 è una radice terza primitiva di 1, un campo di spezzamento di $(X^2+X+1)(X^2-X+1)$ è $\mathbb{Q}(\omega)$ (possiamo scegliere $\omega = e^{\pi i/3}$).

3. Il grado di $\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}$ è il grado del polinomio minimo di ω che è 2, quindi il gruppo di Galois di q ha ordine 2, pertanto è isomorfo a $\mathbb{Z}/2$. □

Esercizio 0.3. *Sia G un gruppo di cardinalità* 306. *Supponiamo inoltre che esista un unico 17-Sylow H.*

1. *Dimostrare che G contiene un sottogruppo normale abeliano di ordine 153.*
2. *Dire se G è risolubile.*
3. *Dare un esempio di un tale gruppo G che non sia abeliano.*

Soluzione. 1. Osserviamo che $306 = 17 \cdot 3^2 \cdot 2$. Sia K un 3-Sylow, poiché H è normale in G, $KH = HK$ è un sottogruppo di G. Dato che $|H| = 17$ e $|K| = 9$, $|H \cap K|$ deve dividere sia 9 che 17, quindi $H \cap K = (1)$ e $|HK| = 153$. Il sottogruppo HK è normale in G perché ha indice 2 in G. Resta da dimostrare che HK è abeliano. Dato che H è normale in G, K agisce per coniugio su H che è un gruppo ciclico di ordine 17. Quindi abbiamo un omomorfismo $\psi : K \to Aut(H) \cong \mathbb{Z}/16$, $\psi(k)(h) = khk^{-1}$, $\forall k \in K$, $\forall h \in H$. Gli elementi di K hanno ordine che divide 9 e $\forall k \in K$, $o(\psi(k))|o(k)|9$. D'altra parte $o(\psi(k))||Aut(H)| = 16$, quindi $o(\psi(k)) = 1$, $\forall k \in K$. Dunque ψ è l'omomorfismo banale e pertanto $\forall k \in K$ e $\forall h \in H$ si ha $kh = hk$, quindi HK è isomorfo a $H \times K$ che è abeliano perché H è ciclico e K ha ordine $9 = 3^2$, quindi è abeliano ed è isomorfo o a $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$, o a $\mathbb{Z}/9$.

2. Sia $N := HK$. Abbiamo dimostrato che $|N| = 153$, N è normale in G. Allora la catena $(1) < N < G$ mostra che G è risolubile perché N è abeliano e G/N ha ordine 2, quindi è abeliano.

3. Supponiamo che i 3-Sylow siano isomorfi a $\mathbb{Z}/9$. Sia $N \cong K \times H \cong \langle z, w \mid z^9 = 1,\ w^{17} = 1,\ zw = wz \rangle$. Sia L un 2-Sylow, $L = \langle \sigma \rangle$, con $\sigma^2 = 1$. Il gruppo L agisce per coniugio su N, quindi abbiamo un omomorfismo $\phi : L \to Aut(N)$, $\phi(\sigma)(n) = \sigma n \sigma^{-1}$, $\forall n \in N$. Definiamo ϕ nel modo seguente: $\phi(\sigma)(z) = z^8 = z^{-1}$, $\phi(\sigma)(w) = w^{16} = w^{-1}$. Per vedere che ϕ è ben definito, poiché $o(\sigma) = 2$, dobbiamo verificare che $\phi(\sigma^2) = Id_N$, ossia che $\phi(\sigma^2)(z) = z$ e $\phi(\sigma^2)(w) = w$. Questo è vero perché $\phi(\sigma^2)(z) = \phi(\sigma) \circ \phi(\sigma)(z) = \phi(\sigma)(z^8) = (\phi(\sigma)(z))^8 = z^{64} = z$ e $\phi(\sigma^2)(w) = \phi(\sigma) \circ \phi(\sigma)(w) = \phi(\sigma)(w^{16}) = (\phi(\sigma)(w))^{16} = w^{16^2} = w$. Quindi $G = NL \cong N \rtimes_\phi \langle \sigma \rangle$ non è abeliano perché ϕ è non banale. Si verifica immediatamente che H è normale in G, dato che $H = \langle w \rangle$ e $\sigma w \sigma^{-1} = w^{-1}$ e $zwz^{-1} = w$.

□