Corso di Algebra 2 - a.a. 2014-2015
Prova scritta del 17.6.2015

Esercizio 1
Sia $P(X) = X^8 - 3X^4 - 4 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Determinare un campo di spezzamento K di $P(X)$ su $\mathbb{Q}$.

2. Determinare il gruppo di Galois di $p(X)$.

3. Descrivere il reticolo dei campi intermedi dell'estensione $\mathbb{Q} \subset K$.

Risoluzione. Poniamo $Y = X^4$ e consideriamo il polinomio $Y^2 - 3Y - 4$. Esso si fattorizza come $(Y+1)(Y-4)$. Dunque

$$P(X) = (X^4+1)(X^4-4) = (X^4+1)(X^2-2)(X^2+2).$$

Notiamo che $X^4 + 1 = \Phi_8(X)$, l'ottavo polinomio ciclotomico. Dunque, detta ζ una radice ottava primitiva dell'unità, un campo di spezzamento di $P(X)$ è dato da $K = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt{2}, i\sqrt{2})$. Ora, osserviamo che possiamo scegliere ζ come

$$\zeta = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deduciamo allora che $\mathbb{Q}(\zeta, \sqrt{2}, i\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. Inoltre, $\mathbb{Q}(\zeta) \subseteq \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, ed entrambe le estensioni hanno grado 4 su $\mathbb{Q}$. Concludiamo che $K = \mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Il gruppo di Galois di $P(X)$ è dunque $\mathbb{Z}_8^* \cong C_2 \times C_2$. Esso possiede tre sottogruppi di indice 2, che corrispondono a tre estensioni quadratiche intermedie tra $\mathbb{Q}$ e K: si vede subito che tali estensioni sono $\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$. $\square$

Esercizio 2
Sia $P(X) = X^5 - 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Dire se P è risolubile per radicali.

2. Consideriamo ora P come polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Determinare il gruppo di Galois di $P(X)$ su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Risoluzione. P è irriducibile su $\mathbb{Q}$ grazie al criterio di Eisenstein applicato con il primo 2. Si vede facilmente guardando la derivata di P che P ha esattamente 3 radici reali, quindi il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ è isomorfo a S_5 che non è risolubile, quindi P non è risolubile per radicali.

Su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ il polinomio diventa $f(X) = X^5 + X + 2 = (X+1)(X^4 - X^3 + X^2 - X + 2)$, quindi il gruppo di Galois G di f su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ è il gruppo di Galois del polinomio $g(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + 2$ su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Per determinarlo portiamo la quartica nella forma normale in cui non abbiamo il coefficiente di grado 3, quindi poniamo $Y :=$

$X - \frac{1}{4} = X + 1$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$. Dunque G è isomorfo al gruppo di Galois del polinomio $h(Y) = g(Y-1) = Y^4 + 1 = Y^4 - 4 = (Y^2-2)(Y^2+2)$ su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Osserviamo che 2 e -2 non sono quadrati in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, quindi $Y^2 - 2$ e $Y^2 + 2$ sono irriducibili in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[Y]$. Se α è una radice di $Y^2 - 2$ in un campo di spezzamento si ha: $(2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = 8 = -2$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Quindi un campo di spezzamento di h su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ è $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}(\alpha)$ che ha grado 2 su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ perché il polinomio minimo di α su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ è $Y^2 - 2$. Quindi $|G| = [\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}(\alpha) : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}] = 2$, pertanto $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\square$

Esercizio 3

Sia G un gruppo di cardinalità $8p$ con p primo, $p \geq 11$. Supponiamo che i 2-Sylow non siano ciclici e che in G ci sia un solo elemento di ordine 2.

1. Dimostrare che G non è semplice.
2. Determinare la classe di isomorfismo di un 2-Sylow.
3. Dimostrare che G ha un sottogruppo normale isomorfo a $\mathbb{Z}/(2p)\mathbb{Z}$.
4. Dare un esempio di un gruppo di ordine 88 tale che i suoi 2-Sylow non siano ciclici e che abbia un solo elemento di ordine 2.

Risoluzione. Il numero dei p-Sylow è congruo a 1 modulo p e divide $|G| = 8p$, quindi divide 8. Pertanto c'è un unico p-Sylow che è dunque normale in G per cui G non è semplice.

I 2-Sylow hanno ordine 8 e non sono ciclici. Un gruppo non ciclico di ordine 8 è isomorfo o a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, o a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, o a D_4 o a Q_8. Tra questi gruppi solo in Q_8 c'è un unico elemento di ordine 2, quindi un 2-Sylow è isomorfo a Q_8. Sia $H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'unico p-Sylow e sia K un 2-Sylow. H è normale in G quindi HK è un sottogruppo di G. Si ha: $|H \cap K| \mid |H| = p$ e $|H \cap K| \mid |K| = 8$, quindi $H \cap K = (e)$ e pertanto $|HK| = |H| \cdot |K| = |G|$ e allora $G = HK \cong H \rtimes K$. Sia b l'unico elemento di G di ordine 2, $b \in K$. Osserviamo che $\forall g \in G$ si ha $o(gbg^{-1}) = o(b) = 2$, quindi $gbg^{-1} = b$, cioè b sta nel centro di G. Sia $S := H \cdot \langle b \rangle \subset H \cdot K = G$. Per quanto appena osservato sappiamo che $\langle b \rangle$ è contenuto nel centro di G e H è normale in G, $H \cap \langle b \rangle = (e)$, quindi S è un sottogruppo di G e si ha $S \cong H \times \langle b \rangle \cong H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$. Inoltre S è normale in G perché $\forall g \in G$, $\forall h \in H$ si ha $g(hb^i)g^{-1} = (ghg^{-1})(gb^ig^{-1}) = h'b^i$, con $h' \in H$ perché H è normale in G.

Infine basta prendere $G = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times Q_8$. Chiaramente $|G| = 88$, c'è un unico 2-Sylow isomorfo a Q_8 e l'unico elemento di ordine 2 è $(0, b)$, dove b è l'unico elemento di Q_8 di ordine 2. $\square$