Corso di Algebra 1 - a.a. 2009-2010

Prova scritta del 27.6.2011

1. Per quali valori interi positivi di n il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 4 \mod 6 \\ x \equiv n \mod n^2 \end{cases}$$

ha soluzione?

2. Sia G un gruppo e H un sottogruppo di G. Dimostrare che H è normale se e solo se la seguente condizione è verificata:

per ogni $a, b \in G$ si ha $ab \in H$ se e solo e $ba \in H$.

3. Sia $f : D_4 \to D_4$ l'applicazione definita da $f(R^i S^j) = R^{-i} S^j$, per ogni $i, j \in \mathbb{Z}$. Mostrare che f è un automorfismo di D_4.

Sia G l'insieme $D_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con l'operazione

$$(x_1, h_1) \cdot (x_2, h_2) = \begin{cases} (x_1 x_2, h_1 + h_2) & \text{se } h_1 = \bar{0} \\ (x_1 f(x_2), h_1 + h_2) & \text{se } h_1 = \bar{1} \end{cases}$$

Dimostrare che $(G, \cdot)$ è un gruppo e che $D_4 \times \{\bar{0}\}$ è un sottogruppo normale di G.

4. Sia A un anello commutativo e $A_0 = A^* \cup \{0\}$.

   (a) Dimostrare che se A_0 è un sottogruppo (additivo) di A, allora A_0 è un sottocampo di A.

   (b) Fornire un esempio in cui A_0 è un sottocampo di A e A non è un campo.

5. Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli e I, J due ideali di B.

   (a) Dimostrare che $f^{-1}(I) f^{-1}(J) \subseteq f^{-1}(IJ)$.

   (b) Nel caso in cui $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ sia l'omomorfismo definito da $f(P) = P(0)$, dire se si ha $f^{-1}(I) f^{-1}(J) = f^{-1}(IJ)$ per ogni coppia di ideali I, J di $\mathbb{R}$.