

Corso di Algebra 1 - a.a. 2020-2021

Prova scritta del 22.02.2021

Esercizio 1

Sia G un gruppo di ordine 45. Supponiamo che esista un sottogruppo H normale di G di ordine 5.

1. Dire se G/H è abeliano.
2. Supponiamo che G/H non contenga elementi di ordine 9. Determinare G/H a meno di isomorfismo.
3. Supponiamo che G non contenga elementi di ordine 9 e che esista un sottogruppo K normale di G di ordine 9. Determinare G a meno di isomorfismo.

Esercizio 2

1. Determinare, se esistono, tutti gli ideali I di \mathbb{Z} tali che $I \neq (0)$ e tali che esistano due ideali J_1, J_2 di \mathbb{Z} , con $I \subsetneq J_i \subsetneq \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, $J_1 + J_2 = \mathbb{Z}$.
2. Sia $p = X^2 + X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ e sia $I = (p) \subseteq \mathbb{C}[X]$. Dire se esistono due ideali J_1, J_2 di $\mathbb{C}[X]$, con $I \subsetneq J_i \subsetneq \mathbb{C}[X]$, $i = 1, 2$, $J_1 + J_2 = \mathbb{C}[X]$.
3. Sia $I' = (p) \subseteq \mathbb{Q}[X]$. Dire se esistono due ideali come sopra contententi I' in $\mathbb{Q}[X]$.