Corso di Algebra 1 - a.a. 2019-2020
Prova scritta del 17.1.2020

Esercizio 1

1. Dire se esiste un omomorfismo $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$ suriettivo.
2. Dire se esiste un omomorfismo $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$ iniettivo.

Esercizio 2 Sia $G = D_5 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

1. Dire se esiste un sottogruppo ciclico H normale di G di ordine 10.
2. Se un tale H esiste, dire se G/H è ciclico.
3. Dire se il centro di G è non banale.

Esercizio 3 Sia A un anello commutativo, sia I un ideale di A, sia $\pi : A \to A/I$ la proiezione $\pi(a) = a + I$ e sia

$$J = \{a \in A \mid \exists k > 0,\ k \in \mathbb{Z} \mid a^k \in I\}.$$

1. Dimostrare che J è un ideale di A che contiene I.
2. Dimostrare che se $\overline{K} \subset A/I$ è un ideale primo di A/I, allora $\pi(J) \subset \overline{K}$.
3. Dimostrare che se A/I è un dominio, allora $J = I$.

Esercizio 4 Sia $I = (7X + 14, X^3 + 2X^2 + 1) \subset \mathbb{Z}[X]$

1. Dire se $7 \in I$.
2. Dire se $\mathbb{Z}[X]/I$ è un dominio e/o se è un campo.