Corso di Algebra 1 - a.a. 2019-2020

Prova scritta del 10.2.2020

Esercizio 1

Trovare tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 \ mod \ 12 \\ x \equiv 7 \ mod \ 18 \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia G un gruppo e H un sottogruppo proprio di G con $H \neq (e)$. Sia $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, $X_k := \{x \in G \mid x^k \in H\}$.

1. Dimostrare che, se G è abeliano, X_k è un sottogruppo di G che contiene H.
2. Sia $G = Q_8$ il gruppo delle unità dei quaternioni. Determinare X_2 per ogni $\forall H$ sottogruppo proprio di G con $H \neq (e)$,
3. Dimostrare che se $G = S_3$, esiste un sottogruppo proprio H di G con $H \neq (e)$ tale che X_2 non è un sottogruppo di G.

Esercizio 3 Sia p un numero primo, siano

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}, \ G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\},$$

$$I := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}.$$

1. Dimostrare che A è un sottoanello dell'anello $\mathbf{M}(2 \times 2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
2. Dimostrare che G è un sottogruppo di $(A^*, \cdot)$ isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Dimostrare che I è un ideale bilatero di A e che A/I è isomorfo come anello a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Esercizio 4 Trovare una fattorizzazione in irriducibili del polinomio

$$f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ e in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$.