Corso di Algebra 1 - a.a. 2020-2021
Prova scritta del 02.09.2021

Esercizio 1
Consideriamo il gruppo $G = (\mathbb{Z}/55\mathbb{Z})^*$.

1. Determinare la cardinalità di G e dire se G è ciclico.
2. Dimostrare che esiste un unico sottogruppo H di G isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e dire quanti sono gli omomorfismi iniettivi da $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in G.
3. Dire se G/H è ciclico.

Esercizio 2 Consideriamo gli ideali $I = (X^3 + 2X + 2) \subseteq \mathbb{Z}[X]$, $J = (6,\ 3X^3 + 6X) \subseteq \mathbb{Z}[X]$ e sia $K = \{g \in \mathbb{Z}[X] \mid g \cdot (X^3 + 2X + 2) \in J\}$.

1. Dimostrare che K è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$ tale che $K \neq \mathbb{Z}[X]$, $J \subseteq K$ e $3 \in K$.
2. Dimostrare che $J \neq K$.
3. Dimostrare che $K = (3)$.