

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2018-2019

Prova scritta del 8.2.2019

COMPITO A

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P, Q, R i punti di coordinate rispettivamente $(-1, 1, -2)$, $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -2)$; sia w il vettore ${}^t(1, 0, 2)$.

- (1) Determinare equazioni cartesiani per il piano Π passante per P, Q e R , per la retta r passante per P e Q e per la retta r' passante per R con giacitura generata da w .
- (2) Determinare le posizioni relative di Π e r' e di r e r' .
- (3) Dire se esistono punti $N \in r, M \in r'$ tali che la retta per N e M sia ortogonale sia a r che a r' . Se tali punti esistono, determinarne le coordinate.

Punti: (4+3+2)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tale che $F_t(1, 1, 0, 0) = (5, 5, 0, 0)$, $F_t(1, 1, 1, 0) = (5, 5, 0, -1)$, $F_t(1, 0, 0, t) = (3 + 2t^2 - 5t, 2 + 2t^2 - 5t, 4t, 2t^2)$. $F_t(0, 0, 1, 1) = (2t - 5, 2t - 5, 4, 2t - 1)$

- (1) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^4 .
- (2) Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- (3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0 .

Punti (4+5+3)

Esercizio 3

- (1) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} t^2 - 4 & t - 2 & 0 & 2t - 5 \\ t - 2 & 1 & t & t - 5 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 2t - 5 & t - 5 & 0 & 2t - 5 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t .
- (2) Dire per quali valori di t esistono dei vettori $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$ tali che ${}^t v B_t w = 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^4$.
- (3) Dire se esistono dei valori di t per cui esiste un sottospazio U di \mathbb{R}^4 di dimensione almeno 3 tale che $\forall v, w \in U, {}^t v B_t w = 0$.

Punti: (5+1+1)

Esercizio 4

Siano A e B due matrici reali di ordine 3 diagonalizzabili e aventi lo stesso polinomio caratteristico.

Vero o Falso:

- (1) A è congruente B ;
- (2) A è simile a B .

Punti: (1+1)

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2018-2019

Prova scritta del 8.2.2019

COMPITO B

Esercizio 1 Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P, Q, R i punti di coordinate rispettivamente $(1, -1, 2)$, $(0, 3, 1)$ e $(-1, 4, 2)$; sia w il vettore ${}^t(-2, 1, -2)$.

- (1) Determinare equazioni cartesiane per il piano Π passante per P, Q e R , per la retta r passante per P e Q e per la retta r' passante per R con giacitura generata da w .
- (2) Determinare le posizioni relative di Π e r' e di r e r' .
- (3) Dire se esistono punti $N \in r, M \in r'$ tali che la retta per N e M sia ortogonale sia a r che a r' . Se tali punti esistono, determinarne le coordinate.

Punti: (4+3+2)

Esercizio 2.

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tale che $F_t(1, 1, 0, 0) = (5, 5, 0, 0)$, $F_t(1, 1, 1, 0) = (5, 5, 0, -1)$, $F_t(1, 0, 0, -t) = (3 + 2t^2 + 5t, 2 + 2t^2 + 5t, -4t, 2t^2)$. $F_t(0, 0, 1, 1) = (-2t - 5, -2t - 5, 4, -2t - 1)$

- (1) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^4 .
- (2) Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- (3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0 .

Punti: (4+5+3)

Esercizio 3

(1) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} t^2 - 4 & t - 2 & 0 & 2t - 5 \\ t - 2 & 1 & -t & -t - 5 \\ 0 & -t & 0 & 0 \\ 2t - 5 & -t - 5 & 0 & 2t - 5 \end{pmatrix}$ al variare del parametro

reale t .

- (2) Dire per quali valori di t esistono dei vettori $v \in \mathbb{R}^4, v \neq 0$ tali che ${}^t v B_t w = 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^4$.
- (3) Dire se esistono dei valori di t per cui esiste un sottospazio U di \mathbb{R}^4 di dimensione almeno 3 tale che $\forall v, w \in U, {}^t v B_t w = 0$.

Punti: (5+1+1)

Esercizio 4

Siano A e B due matrici reali di ordine 3 simmetriche e aventi lo stesso polinomio caratteristico.

Vero o Falso:

- (1) A è congruente B ;
- (2) A è simile a B .

Punti: (1+1)

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2018-2019

Prova scritta del 8.2.2019

COMPITO C

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P, Q, R i punti di coordinate rispettivamente $(1, -1, 3)$, $(0, 1, -1)$ e $(2, 3, 4)$; sia w il vettore ${}^t(-1, 1, -1)$.

- (1) Determinare equazioni cartesiane per il piano Π passante per P, Q e R , per la retta r passante per P e Q e per la retta r' passante per R con giacitura generata da w .
- (2) Determinare le posizioni relative di Π e r' e di r e r' .
- (3) Dire se esistono punti $N \in r, M \in r'$ tali che la retta per N e M sia ortogonale sia a r che a r' . Se tali punti esistono, determinarne le coordinate.

Punti: (4+3+2)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tale che tale che $F_t(-1, -1, 0, 0) = (-5, -5, 0, 0)$, $F_t(-1, -1, -1, 0) = (-5, -5, 0, 1)$, $F_t(1, 0, 0, -t) = (3 + 2t^2 + 5t, 2 + 2t^2 + 5t, -4t, 2t^2)$. $F_t(0, 0, 1, 1) = (-2t - 5, -2t - 5, 4, -2t - 1)$

- (1) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^4 .
- (2) Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- (3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0 .

Punti: (4+5+3)

Esercizio 3

(1) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} t^2 - 4 & t - 2 & 0 & 2t - 5 \\ t - 2 & 1 & -t & t \\ 0 & -t & 0 & 0 \\ 2t - 5 & t & 0 & 2t - 5 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t .

- (2) Dire per quali valori di t esistono dei vettori $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$ tali che ${}^t v B_t w = 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^4$.
- (3) Dire se esistono dei valori di t per cui esiste un sottospazio U di \mathbb{R}^4 di dimensione almeno 3 tale che $\forall v, w \in U, {}^t v B_t w = 0$.

Punti: (5+1+1)

Esercizio 4.

Siano A e B due matrici reali di ordine 3 ortogonali aventi lo stesso polinomio caratteristico. *Vero o Falso:*

- (1) $A = B$;
- (2) A è simile a B .

Vero o Falso: **Punti: (1+1)**

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2018-2019

Prova scritta del 8.2.2019

COMPITO D

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P, Q, R i punti di coordinate rispettivamente $(1, 2, 3)$, $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, 2)$; sia w il vettore ${}^t(5, 0, 2)$.

- (1) Determinare equazioni cartesiane per il piano Π passante per P, Q e R , per la retta r passante per P e Q e per la retta r' passante per R con giacitura generata da w .
- (2) Determinare le posizioni relative di Π e r' e di r e r' .
- (3) Dire se esistono punti $N \in r, M \in r'$ tali che la retta per N e M sia ortogonale sia a r che a r' . Se tali punti esistono, determinarne le coordinate.

Punti: (4+3+2)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tale che $F_t(-1, -1, 0, 0) = (-5, -5, 0, 0)$, $F_t(1, 1, 1, 0) = (5, 5, 0, -1)$, $F_t(1, 0, 0, t) = (3 + 2t^2 - 5t, 2 + 2t^2 - 5t, 4t, 2t^2)$. $F_t(0, 0, 1, 1) = (2t - 5, 2t - 5, 4, 2t - 1)$

- (1) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^4 .
- (2) Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- (3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0 .

Punti: (4+5+3)

Esercizio 3

(1) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} t^2 - 4 & t - 2 & 0 & 2t - 5 \\ t - 2 & 1 & t & -t \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 2t - 5 & -t & 0 & 2t - 5 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t .

- (2) Dire per quali valori di t esistono dei vettori $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$ tali che ${}^t v B_t w = 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^4$.
- (3) Dire se esistono dei valori di t per cui esiste un sottospazio U di \mathbb{R}^4 di dimensione almeno 3 tale che $\forall v, w \in U, {}^t v B_t w = 0$.

Punti: (5+1+1)

Esercizio 4

Siano A e B due matrici reali di ordine 3 aventi lo stesso polinomio caratteristico.

Vero o Falso:

- (1) $\det(A - B) = 0$;
- (2) A è simile a B .

Punti: (1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2018-2019*Prova scritta del 8.2.2019 Risultati*

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

Anno di corso: _____ Mat. _____ Fis. _____ (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)**ESERCIZIO 1**

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 3

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 4 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F

(2) V F

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 1 & t & -1 & 0 \end{pmatrix}$$