

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2018-2019

Prova scritta del 16.7.2019

COMPITO A

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso C , P , Q e R i punti di coordinate rispettivamente $(1, 2, 1)$, $(1, 2, 0)$ e $(-3, 0, 2)$; $(1, -1, 1)$; w_1, w_2 i vettori rispettivamente ${}^t(0, 1, 2)$, ${}^t(1, -1, 0)$;

- (1) Determinare equazioni cartesiane per il piano Π per P con giacitura $W := \langle w_1, w_2 \rangle$, della retta r' passante per C con giacitura ortogonale a W e le equazioni parametriche della retta r passante per Q e R .
- (2) Determinare la posizione relativa di r' e r e di r e la sfera S di raggio 1 e centro C .
- (3) Determinare un punto di minima distanza di r da S e dire se è unico.

Punti: (4+3+2)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $x \in \mathbb{R}$, $F_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che $F_x(1, 1, 0) = (3, 1 - x, 3 + x)$, $F_x(3, 1, 2) = (7 - 2x, 1 - x, 3 + 3x)$, $F_x(1, 2, 0) = (4, 2 - 2x, 6 + x)$.

- (1) Trovare la matrice A_x associata ad F_x nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
- (2) Dire per quali valore del parametro reale x , A_x è diagonalizzabile sui reali.
- (3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0 .

Punti (3+5+3)

Esercizio 3

- (1) Determinare la segnatura della forma quadratica $\phi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t^2 x^2 + 2txy + y^2 - 2tyz + t^2 z^2$$

al variare del parametro reale t .

- (2) Determinare $\forall t \neq 0$ un elemento $v_t \in \mathbb{R}^3$ tale che $\phi_t(v_t) < 0$.
- (3) Scrivere la matrice associata a ϕ_t nella base ordinata

$$\{v_1 = {}^t(1, 1, 0), v_2 = {}^t(1, -1, 0), v_3 = {}^t(0, 0, 2)\}.$$

Punti: (4+2+2)

Esercizio 4

Siano A e B due matrici reale di ordine 3 tali che $A + BA = I$ la matrice identità.
Vero o Falso:

- (1) Se A è diagonalizzabile allora B è diagonalizzabile .
- (2) Se A è ortogonale allora B è normale

Punti: (1+1)

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2018-2019

Prova scritta del 16.7.2019

COMPITO B

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso C , P , Q e R i punti di coordinate rispettivamente $(1, 2, -1)$, $(0, 1, 0)$ e $(3, 0, -2)$; $(1, -1, -1)$; w_1, w_2 i vettori rispettivamente ${}^t(0, -1, 2)$, ${}^t(1, 1, 0)$;

- (1) Determinare equazioni cartesiane per il piano Π per P con giacitura $W := \langle w_1, w_2 \rangle$, della retta r' passante per C con giacitura ortogonale a W e le equazioni parametriche della retta r passante per Q e R .
- (2) Determinare la posizione relativa di r' e r e di r e la sfera S di raggio 1 e centro C .
- (3) Determinare un punto di minima distanza di r da S e dire se è unico.

Punti: (4+3+2)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $x \in \mathbb{R}$, $F_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che $F_x(1, 1, 0) = (3, 1+x, 3-x)$, $F_x(3, 1, 2) = (7+2x, 1+x, 3-3x)$, $F_x(1, 2, 0) = (4, 2+2x, 6-x)$.

- (1) Trovare la matrice A_x associata ad F_x nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
- (2) Dire per quali valore del parametro reale x , A_x è diagonalizzabile sui reali.
- (3) Calcolare autovalori e autovettori di A_0 .

Punti (3+5+3)

Esercizio 3

- (1) Determinare la segnatura della forma quadratica $\phi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t^2 x^2 + 2txy + y^2 - 2tyz + t^2 z^2$$

al variare del parametro reale t .

- (2) Determinare $\forall t \neq 0$ un elemento $v_t \in \mathbb{R}^3$ tale che $\phi_t(v_t) < 0$.
- (3) Scrivere la matrice associata a ϕ_t nella base ordinata

$$\{v_1 = {}^t(1, 1, 0), v_2 = {}^t(1, -1, 0), v_3 = {}^t(0, 0, 2)\}.$$

Punti: (4+2+2)

Esercizio 4

Sia A una matrice reale di ordine 3 tale che $A - AB = I$ la matrice identità.

Vero o Falso:

- (1) Se A è diagonalizzabile allora B è diagonalizzabile .
- (2) Se A è ortogonale allora B è normale

Punti: (1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2018-2019*Prova scritta del 16.7.2019 Risultati*

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

Anno di corso: _____ Mat. _____ Fis. _____ (crocettare)

Compito **A** **B** _____ (crocettare)**ESERCIZIO 1**

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 3

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 4 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F

(2) V F

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & x + 1 & 0 \\ -x & 3 & 0 \end{pmatrix}$$