

ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso A e B i punti di coordinate rispettivamente $(2, 3, 1)$, $(1, -1, 2)$; C e P i punti di coordinate rispettivamente $(2, 1, -4)$ e $(3, -1, -2)$; inoltre, siano $v = {}^t(0, 1, 1)$ e $w = {}^t(1, -2, 2)$ due vettori.

- Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per A e B , per il piano π_1 passante per P la cui giacitura è generata dai vettori v e w e per la sfera S di centro C passante per P ;
- determinare le posizioni relative di r e π_1 , di r e S e determinare un'equazione cartesiana per il piano π_2 tangente a S in P ;
- sino r_1, r_2, r_3 tre rette sghembe a due a due. Quante sono (se esistono) le rette s che intersecano tutte e tre le rette date?

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dipendente da $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$F_t(1, 2, 1) = (2t + 1, t - 1, 3t + 1) \quad F_t(0, -1, 1) = (t + 1, -t + 1, 1), \quad F_t(1, 0, -1) = (-1, 1 - t, -t - 1)$$

- a) determinare la matrice A_t associata a F_t nelle basi canoniche;
- b) dire per quali valori di t , A_t è diagonalizzabile su \mathbb{R} ;
- c) calcolare autovalori e autovettori di A_t ;
- d) calcolare al variare di t la segnatura di

$$B_t = \begin{pmatrix} 0 & t+3 & 0 & 0 \\ t+3 & -t & 2t & 0 \\ 0 & 2t & t-1 & t+1 \\ 0 & 0 & t+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

- Dire se è vero o falso che esiste una matrice $A \in M(3, \mathbb{R})$ invertibile tale che $A^6 - A^3 = 0$ e $A^3 \neq I$.
- Dire se è vero o falso che esiste una matrice $A \in M(3, \mathbb{R})$ invertibile tale che $A^6 - A^3 = 0$ e $A \neq I$.
- Dire se è vero o falso che esistono matrici $A \in M(4, \mathbb{C})$ tali che $A^*A = 3I$, e se esistono, dire se sono tutte diagonalizzabili su \mathbb{C} .
- Dire se è vero o falso che esiste una matrice $A \in M(4, \mathbb{C})$ tali che $A^*A = -3I$.