# ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE

## Esercizio 1

Si consideri l'applicazione lineare $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente da $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$F_t(1,1,0) = (2+t, 2, -4-t) \quad F_t(1,-3,1) = (-2t, 0, 2t) \quad F_t(0,0,1) = (-1,-1,2)$$

a) determinare la matrice $A_t$ associata a $F_t$ nelle basi canoniche;

b) dire per quali valori di $t$, $A_t$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;

c) calcolare autovalori e autovettori di $A_0$;

d) calcolare al variare di $t$ la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

## Esercizio 2

Date matrici $A$ e $B$ tali che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Dire se $A$ e $B$ diagonalizzabili e calcolarne autovalori e autospazi.
- Calcolare la segnatura di $-\,{}^tABA$, $BA\,{}^tAB$, ${}^tA + A$.

## Esercizio 3

Date matrici $A$ e $B$ di ordine 2, $A$ invertibile e $B$ simmetrica e diagonalizzabile. Sia $I$ la matrice identita di ordine 2 e sia $C = {}^tABAB$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- Se il rango di $C$ è uguale a 2 allora il rango di $B^2$ è 2.
- Se $B + I$ è definita positiva allora $C + {}^tC + I$ è definita positiva.
- Se $A$ è invertibile allora $C - I$ non è mai ortogonale.
- Se $A$ e $B$ sono invertibili allora $C + I$ non è mai ortogonale.

## Esercizio 4

Sia $\{v_1, \ldots, v_5\}$ una base ortogonale di $\mathbb{R}^5$ tale che ${}^tv_iv_i = i^2 - 5i + 7 \ \forall i$. Sia $A \in M(5, \mathbb{R})$, $A = \sum_{i=1}^{5} v_i\,{}^tv_i$.

- Verificare che $A$ è simmetrica.
- Scrivere $p_A(x)$ e calcolare autovalori e autovettori di $A$ (*Suggerimento:* calcolare $Av_i$...).
- Dire se $A$ è diagonalizzabile.
- Dire se ogni matrice che ammette una base ortogonale di autovettori è simmetrica.
- Calcolare la segnatura di $A$.