ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE

Esercizio 1

Si consideri l'applicazione lineare $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dipendente da $t \in \mathbb{R}$ tale che:

$$F_t(1,1,0,0) = (0,2,2t,0) \quad F_t(-1,1,0,0) = (-2t,-2t-2,2t,0)$$

$$F_t(0,0,0,1) = (0,0,0,-t) \quad F_t(1,-1,1,0) = (3t,2t+2,-3t,2t)$$

a) determinare la matrice A_t associata a F_t nelle basi canoniche;

b) dire per quali valori di t, A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;

c) calcolare autovalori e autovettori di A_{-2}.

Esercizio 2

Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, e sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = 0$, $T(e_3) = e_2$, $T(e_4) = e_3$.

a) scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica;

b) determinare la dimensione dell'immagine di T e una base del nucleo di T;

c) scrivere la matrice che rappresenta $T^2 = T \circ T$ rispetto alla base canonica;

d) determinare la dimensione dell'immagine di T^2 e una base del nucleo di T^2;

e) determinare la dimensione dell'immagine di T^n e una base del nucleo di T^n, per ogni $n \geq 3$.

Esercizio 3

- Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ e sia ϕ la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ data da $\phi(v,w) =^t vAw$, $\forall\ v, w \in \mathbb{R}^3$.
  Dire se è vero o falso che esiste un $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $v \neq 0$ e $\phi(v,v) = 0$.
- Dimostrare che non esiste una matrice $A \in M(4,\mathbb{R})$ invertibile tale che ${}^tAA = -3I$.
- Dire se è vero o falso che esista una matrice $A \in M(4,\mathbb{R})$ tale che ${}^tAA = -3I$.
- Dire se è vero o falso che tutte le matrici $A \in M(2,\mathbb{R})$ tali che $A^2 + A + I = 0$ sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$.
- Sia $A \in M(n,\mathbb{R})$; dimostare che $dim(< A, A^2, A^3, \dots >) \leq n$.