

## ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE

### Esercizio 1

Si consideri l'applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che

$$F(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0), \quad F(0, 3, 1) = (0, 0, 0, 2), \quad F(0, 1, 1) = (0, 0, 0, -2)$$

- a) trovare la matrice associata a  $F$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$ ;
- b) calcolare la dimensione e dare una base del nucleo e dell'immagine di  $F$ .

### Esercizio 2

Si consideri la seguente matrice

$$X_t = \begin{pmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 3t & 0 & 0 \\ t & 0 & -t \end{pmatrix}$$

- a) calcolare il polinomio caratteristico relativo a  $X_t$ ;
- b) calcolare autovalori e autospazi di  $X_1$ ;
- c) calcolare autovalori e autospazi di  $X_{\frac{1}{5}}$ .

### Esercizio 3

Si consideri l'applicazione lineare  $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  con  $t \in \mathbb{R}$  tale che

$$F_t(1, 2, 0, 0) = (t + 3, 4t + 2, 0, 0), \quad F_t(-1, 2, 0, 0) = (-t - 3, 2, 0, 0)$$

$$F_t(0, 0, 0, 1) = (-2, -1, 1, \frac{t}{2} + 2), \quad F_t(0, 1, -2, 1) = (-2t + 2, t, -2t + 1, -\frac{3t}{2} + 2)$$

- a) determinare la matrice  $A_t$  associata a  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^4$ ;
- b) Calcolare gli autovalori di  $A_{-2}$ .

### Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kx + ky + k^2z = 4 \\ x + y + kz = k \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

Si determinino le soluzioni al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

### Esercizio 5

Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 57 & -3 & -33 \\ -10 & -34 & 28 & -76 & 5 & 74 \\ -4 & -25 & 34 & -76 & 2 & 41 \\ 18 & 27 & -39 & 57 & -9 & -42 \\ -8 & 7 & 11 & -38 & 4 & 25 \\ -23 & -44 & 53 & -95 & 40 & 79 \end{pmatrix}$$

$$E = CAB$$

- Dire se  $E$  è diagonalizzabile;
- Calcolare gli autovalori e gli autospazi di  $E$ .
- Verificare se per ogni  $v$  in  $\mathbb{R}^6$   $\dim(\langle v, Ev, E^2v, \dots, E^nv, \dots \rangle) < 3$
- Verificare se per ogni  $v$  in  $\mathbb{R}^6$   $\dim(\langle Ev, E^2v, \dots, E^nv, \dots \rangle) < 3$