

ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE**Esercizio 1**

Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0), \quad F(0, 3, 1) = (0, 0, 0, 2), \quad F(0, 1, 1) = (0, 0, 0, -2)$$

- trovare la matrice associata a F nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 ;
- calcolare la dimensione e dare una base del nucleo e dell'immagine di F .

Esercizio 2

Si consideri la seguente matrice

$$X_t = \begin{pmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 3t & 0 & 0 \\ t & 0 & -t \end{pmatrix}$$

- calcolare il polinomio caratteristico relativo a X_t ;
- calcolare autovalori e autospazi di X_1 ;
- calcolare autovalori e autospazi di $X_{\frac{1}{5}}$.

Esercizio 3

Si consideri l'applicazione lineare $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ con $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$F_t(1, 2, 0, 0) = (t + 3, 4t + 2, 0, 0), \quad F_t(-1, 2, 0, 0) = (-t - 3, 2, 0, 0)$$

$$F_t(0, 0, 0, 1) = (-2, -1, 1, \frac{t}{2} + 2), \quad F_t(0, 1, -2, 1) = (-2t + 2, t, -2t + 1, -\frac{3t}{2} + 2)$$

- determinare la matrice A_t associata a F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^4 ;
- Calcolare gli autovalori di A_{-2} .

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kx + ky + k^2z = 4 \\ x + y + kz = k \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

Si determinino le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5

Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 57 & -3 & -33 \\ -10 & -34 & 28 & -76 & 5 & 74 \\ -4 & -25 & 34 & -76 & 2 & 41 \\ 18 & 27 & -39 & 57 & -9 & -42 \\ -8 & 7 & 11 & -38 & 4 & 25 \\ -23 & -44 & 53 & -95 & 40 & 79 \end{pmatrix}$$

$$E = CAB$$

- Dire se E è diagonalizzabile;
- Calcolare gli autovalori e gli autospazi di E .
- Verificare se per ogni v in \mathbb{R}^6 $\dim(\langle v, Ev, E^2v, \dots, E^nv, \dots \rangle) < 3$
- Verificare se per ogni v in \mathbb{R}^6 $\dim(\langle Ev, E^2v, \dots, E^nv, \dots \rangle) < 3$