ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE

Esercizio 1

Sia $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b \end{pmatrix} \right\}$

a) per quali $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ B è una base?

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ y - z \\ y \end{pmatrix}$

b) mostrare che F è lineare;

c) calcolare $A := (M_F)^E_B$ dove $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ base standard di $\mathbb{R}^3$;

d) verificare che per $(a, b) = (1, 2)$ A è un isomorfismo;

e) verificare che per $(a, b) = (0, -1)$ A non è iniettiva e calcolare $ker(A)$.

Esercizio 2

Sia $t \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2t \\ -1 & 2t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) calcolare il rango di A_t al variare di t;

b) dire per quali valori di t A_t non è iniettiva;

c) per tali valori calcolare $ker(A_t)$ e $Im(A_t)$.

Esercizio 3

Verificare le seguenti affermazioni:

- sia $A \in M(2, \mathbb{R})$ e sia $f : M(2, \mathbb{R}) \to M(2, \mathbb{R})$ applicazione lineare tale che $f(B) = BA - AB$. Allora $dim(ker(f)) \geq 2$;
- siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ tali che AB invertibile; allora A, B sono invertibili;
- sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ tale che $A^m = 0$ per un certo $m \in \mathbb{N}$; allora $det(A) = 0$;
- sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ tale che A^3 abbia rango 1; dire se è vero che anche A e A^2 hanno rango 1;
- siano $A, B, C \in M(3, \mathbb{R})$ e supponiamo A di rango 3, B di rango 2 e C di rango 1. Dire se è vero che: $det(ABC) = 0$, $det(AC - B) = 0$ e $det(AC + CB) = 0$.