TUTORATO di ALGEBRA LINEARE

18 dicembre 2018

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1, P_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(4, 5, 3)$, $(6, 6, 1)$ e $(-1, 4, 2)$; inoltre, sia s la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - z = -8 \\ y - z = -2 \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni parametriche per s, le equazioni cartesiane per la retta r passante per P_1 e P_2, le equazioni cartesiane per il piano π passante per Q e contenente la retta s.

(b) Determinare le posizioni relative di r e π, e di s e r. [incidenti, sghembe]

Esercizio 2

Sia $\{e_1, e_1, e_1, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, e sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = 0$, $T(e_3) = e_2$, $T(e_4) = e_3$.

(a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica.

(b) Determinare il rango di T e una base del nucleo di T.

(c) Scrivere la matrice che rappresenta $T^2 = T \circ T$ rispetto alla base canonica, determinare il rango di T^2 e una base del nucleo di T^2. [$\operatorname{rank} T^2 = 2$]

(d) Determinare il rango di T^n e una base del nucleo di T^n per ogni $n \geq 3$.

Esercizio 3

(a) Sia $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$, calcolare A^{100}. [A è diagonalizzabile...]

(b) Trovare una base ortogonale del sottospazio vettoriale generato da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$ con il prodotto scalare standard.

(c) Sotto l'ipotesi che $A \in M(n, \mathbb{R})$ diagonalizzabile, dimostare il teorema di Cayley-Hamilton per A.

(d) Dire se è vero o falso che non esiste una matrice $A \in M(3, \mathbb{R})$ tale che $A^2 + I$ è nilpotente. [V (guardare gli autovalori di A e di A^2)]

(e) Siano $A, B, C \in M(n, \mathbb{R})$ tali che $C = AB$, definiti $a = \operatorname{rank}(A), b = \operatorname{rank}(B), c = \operatorname{rank}(C)$, verificare che $\max\{0, a + b - n\} \leq c$.