TUTORATO di ALGEBRA LINEARE

20 novembre 2018

Esercizio 1

Sia $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b \end{pmatrix} \right\}$. Per quali $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, B è una base?

$[a \neq 0, b \neq -1/a]$

Esercizio 2

Trovare tutti gli $x \in \mathbb{R}^3$ che risolvono $Ax = b$, dove $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M(4{*}3, \mathbb{R})$ e $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

$$\left[x = \begin{pmatrix} 1/3 - 1/3t \\ 1/3 - 4/3t \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \right]$$

Esercizio 3

Sia $g : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'operatore derivata sui polinomi reali di grado ≤ 2.
Siano $E = \{1, x, x^2\}$, $B = \{x^2 + x + 1, 1 - x, 1 - x^2\}$.

(a) Verificare che E e B sono due basi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
(b) Calcolare $(M_g)_{E,E}$.
(c) Calcolare $(M_g)_{B,B}$. $\left[= \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -2/3 \\ -1 & -1/3 & 4/3 \\ 1 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \right]$
(d) Calcolare $\operatorname{rank}((M_g)_{B,B})$.
(e) Trovare una base per $\ker g$ e $\operatorname{Im} g$.

Esercizio 4

(a) Dire se è vero o falso che $\exists A, B \in M(2, \mathbb{R}) : A \neq 0, B \neq 0, A * B = 0$. $[V]$
(b) Dire se è vero o falso che dati $n, m \in \mathbb{N}, A \in M(n, \mathbb{R}) : A^m = 0 \implies det(A) = 0$. $[V]$
(c) Dire se è vero o falso che $\exists A \in M(3, \mathbb{R}) : \operatorname{rank}(A^2) = 1, \operatorname{rank}(A) = 2$. $[V]$
(d) Dati $A, B, C \in M(3, \mathbb{R}) : \operatorname{rank}(A) = 3, \operatorname{rank}(B) = 2, \operatorname{rank}(C) = 1$, dire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere o false: $det(A * B * C) = 0$, $det(A * C - B) = 0$, $det(A * C - C * B) = 0$. $[V, V, F]$
(e) Dire se è vero o falso che dati $A \in M(2, \mathbb{R})$, $f : M(2, \mathbb{R}) \to M(2, \mathbb{R})$ funzione lineare tale che $f(B) = B * A - A * B$, allora $dim(\ker(f)) \leq 2$. $[V]$