TUTORATO di ALGEBRA LINEARE

12 novembre 2018

Esercizio 1

Sia $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$ e sia $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Verificare che B è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.
(b) Gli elementi di B sono linearmente indipendenti? Costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$?

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ z \\ y \end{pmatrix}$.

(c) Verificare che F è lineare.
(d) Determinare $(M_F)_{E,E}$, $(M_F)_{B,B}$, $(M_F)_{E,B}$, $(M_F)_{B,E}$.
(e) Le matrici $(M_F)_{E,E}$ e $(M_F)_{B,B}$ sono equivalenti? Sono simili?

Esercizio 2

Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Definire $\operatorname{span}(S)$ e verificare che $\operatorname{span}(S) = \mathbb{R}^4$.
(b) Trovare una scrittura di $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di elementi di S.
(c) S costituisce un insieme di vettori linearmente indipendenti? Se no, estrarre da S una base di R^4.

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ y + 3x \\ x \end{pmatrix}$. Siano E_2, E_3 le basi standard.

(a) Definire $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$. Calcolare una base per entrambi.
(b) Calcolare $(M_f)_{E_3,E_2}$.

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2z \\ y \end{pmatrix}$.

(c) Definire $\operatorname{Ker} g$ e $\operatorname{Im} g$. Calcolare una base per entrambi.
(d) Calcolare $(M_g)_{E_2,E_3}$.
(e) Calcolare $(M_{g\circ f})_{E_2,E_2}$ e $(M_{f\circ g})_{E_3,E_3}$.