Scritto di Geometria 2
09/09/2019 - a.a. 2018-2019

Esercizio 1
Sia $\gamma : (1, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco e biregolare con curvatura $k(s) = s$ e torsione costante $\tau(s) = -1$, $\forall s \in (1, +\infty)$. Sia $\alpha : (1, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) := \gamma(s) - s\mathbf{b}(s)$, dove $\mathbf{b}$ è il versore binormale di γ.

1. Dire se α è una curva biregolare.
2. Determinare il triedro di Frenet di α in funzione di quello di γ.
3. Dimostrare che la torsione τ_α di α è sempre positiva.

Esercizio 2
Sia
$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0,\ x^2 + y^3 + z^2 = 1\}.$$

1. Dimostrare che S è una superficie regolare e orientabile e scrivere una mappa di Gauss per S.
2. Dare una parametrizzazione globale di S.
3. Dire se la curva $C := S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ è una geodetica.
4. Dire se i punti di C sono punti ellittici di S.

Esercizio 3
Siano $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\beta(t) = (t, t^3, 0)$, $X := \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Im}(\beta)$ il complementare dell'immagine di β e $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}$.

1. Dimostrare che X è connesso per archi.
2. Determinare il gruppo fondamentale di X.
3. Determinare il gruppo fondamentale di $Y := \mathbb{R}^3 \setminus (\mathrm{Im}(\beta) \cup Z)$.
4. Dire se X e Y sono omotopicamente equivalenti e se sono omeomorfi.