Scritto di Geometria 2
27/01/2020 - a.a. 2018-2019

Esercizio 1
Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y^4 + z^3 = 0\}$.

1. Mostrare che S è una superficie regolare orientabile di classe C^∞.
2. Scrivere una parametrizzazione di S, $\sigma : \mathbb{R}^2 \to S$.
3. Sia $\alpha : \{t \in \mathbb{R} \,| t > 1/2\} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t^3(t-1), t, t)$, $t > 1/2$. Mostrare che α definisce una curva C regolare contenuta in S.
4. Calcolare la curvatura e la torsione di C nel punto $\alpha(t)$, $\forall t > 1/2$.
5. Determinare la curvatura normale di C in S nel punto $(0, 1, 1)$.
6. Dire se C è una geodetica.

Esercizio 2 Sia $\phi : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u > 0\} \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$\phi(u, v) = (u^2 v, u^2 + 3v, u^3),$$

e sia S l'immagine di ϕ in $\mathbb{R}^3$.

1. Mostrare che S è una superficie regolare.
2. Mostrare che per ogni punto $p \in S$ esiste una retta passante per p e contenuta in S.
3. Dire se S contiene punti ellittici.

Esercizio 3
Sia $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sfera con centro nell'origine e raggio 1, e

$$D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Sia inoltre $X = S^2 \cup D$. Mostrare che X è connesso per archi, e determinare il suo gruppo fondamentale.