Scritto di Geometria 2
26/09/2019 - a.a. 2018-2019

Esercizio 1

Sia $U := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v > 0\}$ e sia $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(u, v) = (u^4, v^4, 2uv)$.

1. Dimostrare che σ è una parametrizzazione globale di $S := Im(\sigma)$.
2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Dimostrare che $F_{|S}$ è un'isometria di S.
3. Sia $C := \{(x, y, z) \in S \mid F(x, y, z) = (x, y, z)$. Dare una parametrizzazione di C e calcolare la curvatura e la torsione di C.
4. Calcolare la curvatura geodetica di C e la curvatura normale di C nella orientazione di S indotta da σ.
5. Calcolare le curvature principali di S nei punti di C.
6. Calcolare la curvatura Gaussiana di S nei punti di C.

Esercizio 2

Siano $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0,\ z > 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$, $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y < 0,\ z < 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$, $X := S^2 \cup A \cup B$, $Y := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y = -z,\ z^2 + y^2 \leq 1\}$, sia $Z := X \cup Y$.

1. Dimostrare che X è connesso per archi.
2. Determinare il gruppo fondamentale di X.
3. Determinare il gruppo fondamentale di Z.
4. Dire se X e Z sono omotopicamente equivalenti e se sono omeomorfi.