Scritto di Geometria 2
25/01/2019 - a.a. 2017-2018

Esercizio 1
Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz - y = 0\}$, $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$.

1. Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile e scrivere una mappa di Gauss.
2. Determinare la natura dei punti di S.
3. Sia $C = S \cap \Pi$. Determinare una parametrizzazione di C e la sua curvatura e torsione.
4. Dire se C è una geodetica.

Esercizio 2
Sia $\sigma : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(u, v) = (u, v^2, u^3 + v^4)$ e sia S l'immagine di σ. Sia $\gamma : \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (0, t^2, t^4)$.

1. Determinare la prima e la seconda forma fondamentale di S.
2. Dire se esiste un'isometria F di S tale che $F(1, 9, 82) = (0, 9, 81)$.
3. Dimostrare che γ è una curva regolare contenuta in S e determinare il triedro di Frenet di γ.
4. Dire se γ è una geodetica e/o se γ è una linea asintotica.

Esercizio 3
Siano $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1,\ z - 1 = -x^2 - y^2\}$, $P = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Dimostrare che $X \cup Y$ è connesso per archi.
2. Dimostrare che X è un retratto di deformazione forte di $X \cup Y$.
3. Determinare il gruppo fondamentale di $X \cup Y$.
4. Determinare il gruppo fondamentale di $X \cup Y \setminus \{P\}$.