Scritto di Geometria 2
24/09/2018 - a.a. 2017-2018

Esercizio 1

Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, una curva piana biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco e sia $\mathbf{b}$ la sua binormale. Sia poi $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = \gamma(t) + t^2\mathbf{b}$.

1. Dimostrare che α è una curva regolare e biregolare.
2. Determinare il triedro di Frenet di α in funzione di quello di γ.
3. Determinare la curvatura e la torsione di α in funzione della curvatura k di γ.
4. Supponendo che $k(t) = t^2 + 1$, dire se α è una curva piana.

Esercizio 2

Siano $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x^2 = yz,\ y > 0\}$, $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}, \sqrt{1 - t^2})$

1. Dimostrare che Σ è una superficie regolare e orientabile e scrivere esplicitamente una mappa di Gauss per Σ.
2. Determinare la curvatura gaussiana di Σ.
3. Dimostrare che γ è una curva regolare contenuta in Σ.
4. Dire se γ è una geodetica.

Esercizio 3

Siano

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x^2 - y^2 = 0\},\ C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{8}\},$$

$$C' = C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq y\}$$

1. Dimostrare che X è connesso per archi.
2. Determinare il gruppo fondamentale di X.
3. Determinare il gruppo fondamentale di $X \cup C'$.
4. Determinare il gruppo fondamentale di $X \cup C$.