Esame scritto di Geometria 2

Appello del 20 giugno 2018

Esercizio 1

Sia
$$\gamma : (0,2) \to \mathbb{R}^3, \ \gamma(t) = (e^t, t^3, \frac{1}{3}t^3).$$

1. Mostrare che γ è una curva regolare e biregolare.
2. Determinare la curvatura e la torsione di γ.
3. Sia $\alpha(t) := \gamma(t) + \mathbf{n}(\mathbf{t})$, dove $\mathbf{n}$ è il versore normale di γ. Dimostrare che per $t \leq \frac{1}{8}$, α è una curva regolare.
4. Dire se α è una curva piana.

Esercizio 2

Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 5\}$.

1. Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile e scrivere una mappa di Gauss.
2. Sia $C := \{(x,y,z) \in S \mid z = 0\}$. Determinare una parametrizzazione per lunghezza d'arco di C.
3. Dire se C è una geodetica e se C è una linea di curvatura.
4. Sia $R := \{(x,y,z) \in S \mid z \geq 0\}$. Determinare $\int_R K d\sigma$.

Esercizio 3

Siano
$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x^2 - y^2 = 0 \ , \ 0 \leq z < \frac{1}{2}\}, \ Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \ , \ 0 \leq z < \frac{1}{2}\}$$
$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > x^2 + y^2\}.$$

1. Dimostrare che Z è connesso per archi e determinare il gruppo fondamentale di Z.
2. Dire se Y è un retratto di deformazione di $X \cup Y$.
3. Determinare il gruppo fondamentale di $X \cup Y$.
4. Determinare il gruppo fondamentale di $X \cup Y \cup \{x = y, \ z = \frac{1}{4}, \ |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{8}\}$.