Corso di Algebra Lineare - a.a. 2016-2017

Prova scritta del 20.2.2017

COMPITO **D**

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso A e B i punti di coordinate rispettivamente $(1,0,2)$ e $(3,1,0)$; v_1, v_2 i vettori ${}^t(1,-1,-2)$, ${}^t(-2,1,1)$; P, O i punti di coordinate rispettivamente $(-2,1,-4)$ e $(1,2,-3)$; sia infine r_2 la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 3y+z=1 \end{cases} .$$

(1) Determinare equazioni cartesiane per la sfera S di centro O e raggio 3, per il piano π passante per P e la cui giacitura è generata da v_1 e v_2 e per la retta r_1 passante per A e per B;

(2) determinare le posizioni relative di r_2 e S, di π e S, di r_1 e r_2;

(3) siano S_1 e S_2 due sfere di raggio R i cui centri (rispettivamente O_1 e O_2) distano tra loro $6R$. Un punto T giace sul piano passante per il punto O_2 e perpendicolare alla retta contenente O_1 e O_2, a distanza $8R$ da O_2. Esistono (e, nel caso, in numero finito o infinito) sfere tangenti a S_1 e a S_2 che abbiano centro in un punto Q tale che $d(T,Q) \leq 3R$? E se la sfera S_1 avesse raggio $3R$, quale sarebbe la risposta?

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F_t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+2 \\ -\frac{5}{4}t^2+\frac{9}{8} \\ 2t^2-4 \end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ \frac{1}{4}-\frac{t^2}{4} \\ t^2 \end{pmatrix},\ F_t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{5}{2}t^2-2 \\ -4t^2+8 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nella base standard in partenza e in arrivo.

(2) Dire per quali valori del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(3) Calcolare autovalori e autovettori di A_{-2}.

(4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} (t-2)^2 & t(t-2) & t^2+1 & 0 \\ t(t-2) & t^2 & 0 & 1 \\ t^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t.

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3

(1) Dire se è vero o falso che tutte le matrici $A \in M(4,\mathbb{R})$ invertibili tali che $A^5 = A$ sono diagonalizzabili.

(2) Dire se è vero o falso che per ogni $A \in M(5,\mathbb{R})$, ${}^tA - A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

(3) Dire se è vero o falso che per ogni $A \in M(5,\mathbb{R})$, ${}^tA - A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(4) Dire se è vero o falso che per ogni $A, B \in M(3,\mathbb{R})$ di rango 1, $A+B$ ha rango minore o uguale di 2.

Punti: (1+1+2+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2016-2017
Prova scritta del 20.02.2017 Risultati

Nome: Cognome: Matricola:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F
(2) V F
(3) V F
(4) V F