

## Corso di Algebra Lineare - a.a. 2016-2017

Prova scritta del 20.2.2017

### COMPITO B

#### Esercizio 1

Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso  $A$  e  $B$  i punti di coordinate rispettivamente  $(1, 2, 0)$  e  $(3, 0, -1)$ ;  $v_1, v_2$  i vettori  ${}^t(1, -2, 1)$ ,  ${}^t(-2, 1, -1)$ ;  $P, O$  i punti di coordinate rispettivamente  $(-2, -4, -1)$  e  $(1, -3, -2)$ ; sia infine  $r_2$  la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ y - 3z = 1 \end{cases}.$$

- (1) Determinare equazioni cartesiane per la sfera  $S$  di centro  $O$  e raggio 2, per il piano  $\pi$  passante per  $P$  e la cui giacitura è generata da  $v_1$  e  $v_2$  e per la retta  $r_1$  passante per  $A$  e per  $B$ ;
- (2) determinare le posizioni relative di  $r_2$  e  $S$ , di  $\pi$  e  $S$ , di  $r_1$  e  $r_2$ ;
- (3) siano  $S_1$  e  $S_2$  due sfere di raggio  $R$  i cui centri (rispettivamente  $O_1$  e  $O_2$ ) distano tra loro  $6R$ . Un punto  $T$  giace sul piano passante per il punto  $O_2$  e perpendicolare alla retta contenente  $O_1$  e  $O_2$ , a distanza  $8R$  da  $O_2$ . Esistono (e, nel caso, in numero finito o infinito) sfere tangenti a  $S_1$  e a  $S_2$  che abbiano centro in un punto  $Q$  tale che  $d(T, Q) \leq 3R$ ? E se la sfera  $S_1$  avesse raggio  $3R$ , quale sarebbe la risposta?

**Punti: (3+4+3)**

#### Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale  $t$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$F_t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 2 \\ -\frac{t^2}{2} + \frac{7}{8} \\ \frac{t^2}{2} + 2 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ -\frac{1}{4} + \frac{t^2}{2} \\ t^2 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ t^2 - 2 \\ -t^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare la matrice  $A_t$  associata a  $F_t$  nella base standard in partenza e in arrivo.
- (2) Dire per quali valori del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .
- (3) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_{-2}$ .

(4) Determinare la segnatura di  $B_t = \begin{pmatrix} (t-2)^2 & t(t-2) & t^2+1 & 0 \\ t(t-2) & t^2 & 0 & 1 \\ t^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  al variare del parametro

reale  $t$ .

**Punti: (4+4+3+4)**

#### Esercizio 3

- (1) Dire se è vero o falso che tutte le matrici  $A \in M(7, \mathbb{R})$  invertibili tali che  $A^5 = A$  sono diagonalizzabili.
- (2) Dire se è vero o falso che per ogni  $A \in M(3, \mathbb{R})$ ,  ${}^tA - A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$ .
- (3) Dire se è vero o falso che per ogni  $A \in M(3, \mathbb{R})$ ,  ${}^tA - A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .
- (4) Dire se è vero o falso che per ogni  $A, B \in M(5, \mathbb{R})$  di rango 1,  $2A + B$  ha rango minore o uguale di 2.

**Punti: (1+1+2+1)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2016-2017**

*Prova scritta del 20.02.2017* Risultati

Nome:

Cognome:

Matricola:

Anno di corso:

Mat.

Fis.

(crocettare)

Compito

**A**

**B**

**C**

**D**

(crocettare)

**ESERCIZIO 1**

(1)

(2)

(3)

**ESERCIZIO 2**

(1)

(2)

(3)

(4)

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

(1) V      F

(2) V      F

(3) V      F

(4) V      F